1．写出下列复数的实部，虚部，模和幅角：

（1）$1+i\sqrt{3}$；（2）$1-\cos\alpha+i\sin\alpha$，$0\le\alpha<2\pi$；（3）$e^{i\sin x}$，x为实数；（4）e^{iz}；

（5）e^{z}；（6）$\sqrt[4]{-1}$；（7）$\sqrt{1+i}$；（8）$\sqrt{\dfrac{1+i}{1-i}}$；（9）e^{1+i}；（10）$e^{i\varphi(x)}$，$\varphi(x)$是实变数x

的实函数。

（1）$\mathrm{Re}=1$，$\mathrm{Im}=\sqrt{3}$，$\mathrm{Am}=\sqrt{\mathrm{Re}^2+\mathrm{Im}^2}=2$，$\mathrm{Arg}=\arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)+2k\pi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$；

（2）$\mathrm{Re}=1-\cos\alpha$，$\mathrm{Im}=\sin\alpha$，$\mathrm{Am}=\sqrt{\left(1-\cos\alpha\right)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2-2\cos\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$，

$\tan\left(\mathrm{Arg}\right)=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\cot\dfrac{\alpha}{2}$，所以$\mathrm{Arg}=\dfrac{\pi-\alpha}{2}+2k\pi$；

（3）$\mathrm{Am}=1$，$\mathrm{Arg}=\sin x+2k\pi$，$\mathrm{Re}=\cos\left(\sin x\right)$，$\mathrm{Im}=\sin\left(\sin x\right)$；

（4）$z=x+iy$，$e^{iz}=e^{-y+ix}$，$\mathrm{Am}=e^{-y}$，$\mathrm{Arg}=x+2k\pi$，$\mathrm{Re}=e^{-y}\cos x$，$\mathrm{Im}=e^{-y}\sin x$；

（5）$\mathrm{Am}=e^{x}$，$\mathrm{Arg}=y+2k\pi$，$\mathrm{Re}=e^{x}\cos y$，$\mathrm{Im}=e^{x}\sin y$；

（6）$\sqrt[4]{-1}=\left[e^{i\left(\pi+2n\pi\right)}\right]^{\frac{1}{4}}=e^{i\frac{2n+1}{4}\pi}$，$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{Am}=1$，$\mathrm{Arg}=\dfrac{2n+1}{4}\pi+2k\pi$，

$\mathrm{Re}=\cos\left(\dfrac{2n+1}{4}\pi\right)$，$\mathrm{Im}=\sin\left(\dfrac{2n+1}{4}\pi\right)$；

（7）$\sqrt{1+i}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)/2}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+n\pi\right)}$，$(n=0,\ 1)$，$\mathrm{Am}=\sqrt[4]{2}$，$\mathrm{Arg}=\dfrac{\pi}{8}+n\pi+2k\pi$，

$\mathrm{Re}=\sqrt[4]{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+n\pi\right)=\left(-1\right)^n\sqrt[4]{2}\cos\dfrac{\pi}{8}$，$\mathrm{Im}=\left(-1\right)^n\sqrt[4]{2}\sin\dfrac{\pi}{8}$；

（8）$\sqrt{\dfrac{1+i}{1-i}}=\left[\dfrac{\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2n\pi)}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{i\frac{\pi/2+2n\pi}{2}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}$，$(n=0,\ 1)$，$\mathrm{Am}=1$，$\mathrm{Arg}=\dfrac{\pi}{4}+n\pi+2k\pi$，

$\mathrm{Re}=\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{Im}=\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{2}}$；

（9）$\mathrm{Am}=e$，$\mathrm{Arg}=1+2k\pi$，$\mathrm{Re}=e\cos 1$，$\mathrm{Im}=e\sin 1$；

（10）$\mathrm{Am}=1$，$\mathrm{Arg}=\varphi(x)+2k\pi$，$\mathrm{Re}=\cos\left[\varphi(x)\right]$，$\mathrm{Im}=\sin\left[\varphi(x)\right]$；

2．把下列关系用几何图形表示出来：

（1）$|z|<2$，$|z|=2$，$|z|>2$；（2）$\operatorname{Re}z>\dfrac{1}{2}$，$1<\operatorname{Im}z<2$；（3）$\arg(1-z)=0$，$\arg(1+z)=\dfrac{\pi}{3}$，$\arg(z+1-i)=\dfrac{\pi}{2}$；（4）$0<\arg(1-z)<\dfrac{\pi}{4}$，$0<\arg(1+z)<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}<\arg(z-1-2i)<\dfrac{\pi}{3}$；（5）$\alpha<\arg z<\beta$ 与 $\gamma<\operatorname{Re}z<\delta$ 的公共区域，α，β，γ，δ 均为常数；（6）$|z-i|<1$，$1<|z-i|<\sqrt{2}$；（7）$|z-a|=|z-b|$，a，b 为常数；（8）$|z-a|+|z-b|=c$，其中 a，b，c，为常数，且 $c>|a-b|$；（9）$|z|+\operatorname{Re}z<1$；（10）$0<\arg\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)<\dfrac{\pi}{4}$。

（1）
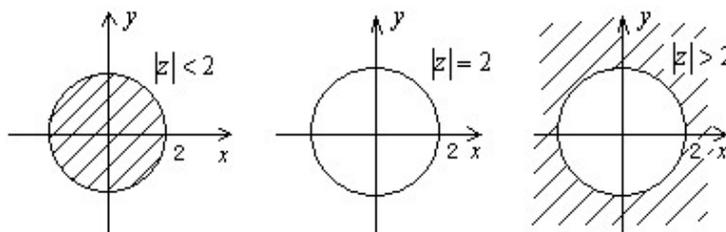
（2）
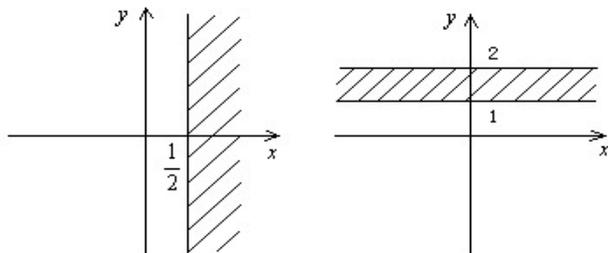
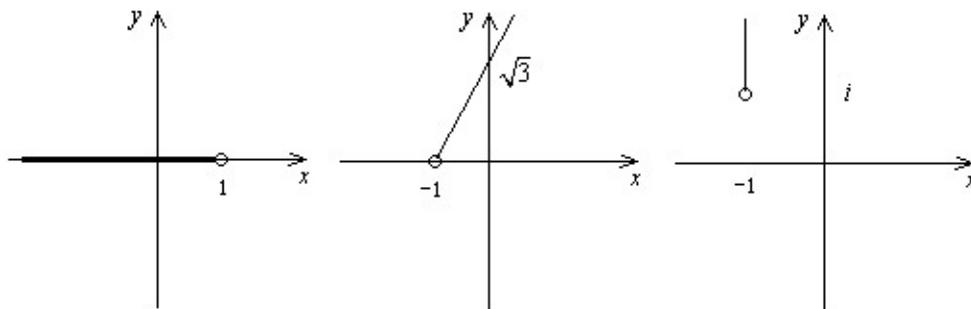（3）$\arg(1-z)=\arg(1-x-iy)=0 \Leftrightarrow 1-x>0$ 且 $y=0$，即 $x<1$，$y=0$；

$\arg(1+z)=\arg(1+x+iy)=\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 1+x>0$ 且 $y=\sqrt{3}(1+x)$；

$\arg(z+1-i)=\arg\left[x+1+i(y-1)\right]=\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x+1=0$ 且 $y-1>0$。

（4）$0 < \arg(1-z) = \arg\left[(1-x)-iy\right] < \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < -y < 1-x$；

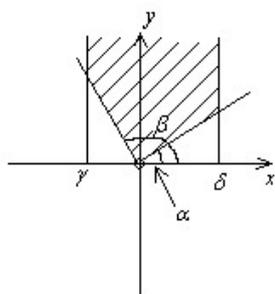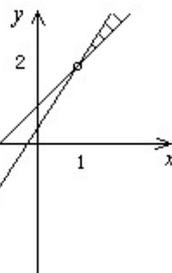$0 < \arg(1+z) = \arg\left[(1+x)+iy\right] < \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < y < 1+x$；

$\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-1-2i) = \arg\left[(x-1)+i(y-2)\right] < \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < x-1 < y-2 < \sqrt{3}(x-1)$；
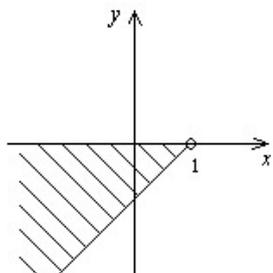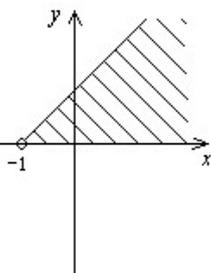
（5）   （6）
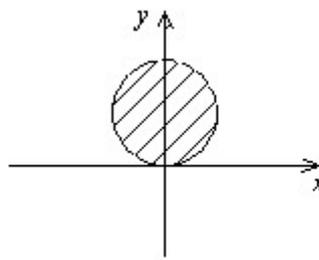
（7）   （8）
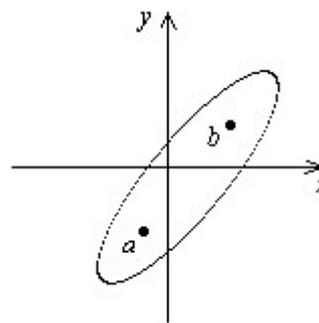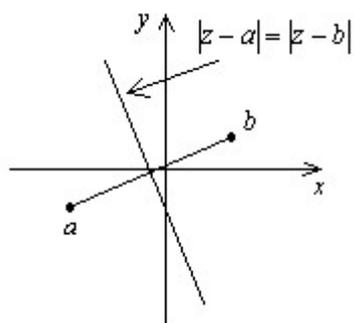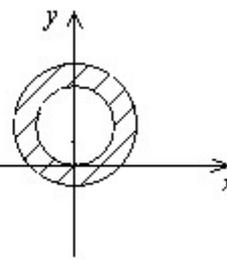
（9）$|z| + \operatorname{Re} z = \sqrt{x^2+y^2} + x < 1$，化简得 $x < \dfrac{1}{2}\left(1-y^2\right)$。
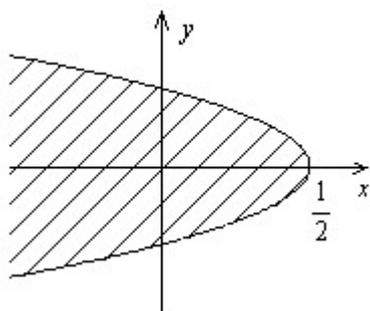
（10）$\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\dfrac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2}$，所以 $0<\arg\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)<\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow$

$0<-2x<x^2+y^2-1$，即 $x<0$ 且 $(x+1)^2+y^2>2$。
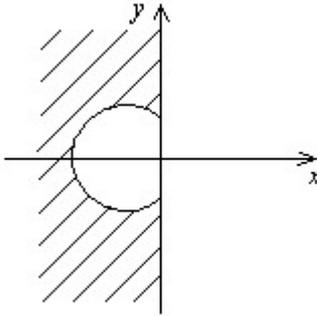
3．已知一复数 z，画出 iz，$-z$，$\bar{z}$，$\dfrac{1}{\bar{z}}$，$\dfrac{1}{z}$，并指出它们之间的几何关系。

把 z 写成 $\rho e^{i\varphi}$，则 $iz=\rho e^{i(\varphi+\pi/2)}$，即把 z 逆时针旋转 90 度。$-z=\rho e^{i(\varphi+\pi)}$，即把 z 逆时针

旋转 180 度。$\bar{z}=\rho e^{-i\varphi}$，即 z 关于实轴的对称点。$\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{\rho}e^{i\varphi}$，即 z 关于单位圆的对称点。

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\rho}e^{-i\varphi}$，即 $\bar{z}$ 关于单位圆的对称点。
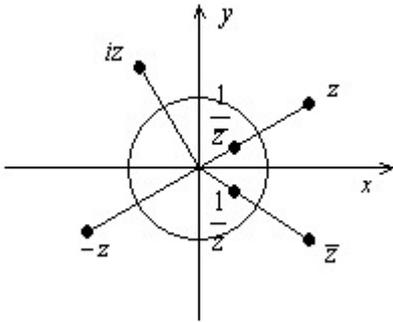
4．若 $|z|=1$，试证明 $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$，$a$，$b$ 为任意复数。

$\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|^2=\dfrac{(az+b)(\overline{az}+\bar{b})}{(\bar{b}z+\bar{a})(b\bar{z}+a)}=\dfrac{|a|^2+a\bar{b}\bar{z}+\bar{a}b\bar{z}+|b|^2}{|b|^2+a\bar{b}\bar{z}+\bar{a}b\bar{z}+|a|^2}=1$，所以 $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$。

5．证明下列各式：

（1）$|z-1| \le \big||z|-1\big| + |z||\arg z|$；

（2）若 $|z_1| = |z_2| = |z_3|$，则 $\arg \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \dfrac{1}{2} \arg \dfrac{z_2}{z_1}$。

（1）先证 $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z|$。

记 $z = \rho e^{i\varphi}$，$\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| = |e^{i\varphi} - 1| = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = 2\left|\sin\dfrac{\varphi}{2}\right| \le |\varphi| = |\arg z|$。

$|z-1| = \big|z - |z| + |z| - 1\big| \le \big|z - |z|\big| + \big||z| - 1\big| = \big||z| - 1\big| + |z|\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \le \big||z| - 1\big| + |z||\arg z|$。

（2）
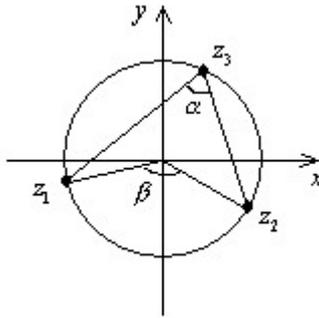
如图，z_1，z_2，z_3 在同一圆周上，$\alpha = \arg\dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$，$\beta = \arg\dfrac{z_2}{z_1}$。由于同弧所对圆周角是

圆心角的一半，所以 $\alpha = \dfrac{1}{2}\beta$，即 $\arg\dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \dfrac{1}{2}\arg\dfrac{z_2}{z_1}$。

6．用复数 z 表示曲线上的变点。（1）写出经过点 a 且与复数 b 所代表的矢量平行的直线方程；（2）写出以 d 和 $-d$ 为焦点，长轴长 $2a$ 的椭圆方程（$a > |d|$）。

（1）矢量 $z - a$ 与矢量 b 平行，所以 $z - a = kb$，k 为实数；

（2）由椭圆定义得 $|z - d| + |z + d| = 2a$。

7．用复数运算法则推出：（1）平面直角坐标平移公式；（2）平面直角坐标旋转公式。
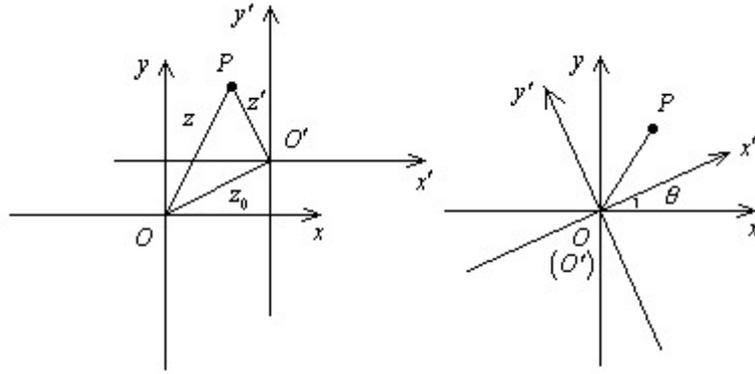
（1）设坐标系 $x'O'y'$ 的原点 O' 在坐标系 xOy 中的坐标是 (x_0, y_0)。 P 点在 xOy 系中的坐标是 (x, y)，在 $x'O'y'$ 系中坐标 (x', y')。如上面左图，令 $\overrightarrow{OP} = z$， $\overrightarrow{O'P} = z'$， $\overrightarrow{OO'} = z_0$。

则 $z' = z - z_0$，即 $x' + iy' = x - x_0 + i(y - y_0)$，由此得 $x' = x - x_0$， $y' = y - y_0$。

（2）将坐标系 xOy 绕原点逆时针旋转 θ 角得到坐标系 $x'O'y'$。如上面右图，$x'O'y'$ 系中 z' 只是比 xOy 系中 z 的幅角小 θ，即 $z' = ze^{-i\theta}$，由此得 $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$，

$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$。

8. 设复数 z_1， z_2， z_3 满足 $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$。证明：$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$。
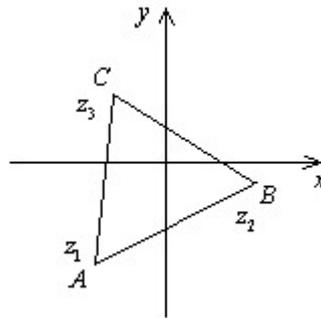
如图，$\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \dfrac{|AB|}{|AC|} e^{i\angle A}$， $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \dfrac{|AC|}{|BC|} e^{i\angle C}$。所以 $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$， $\angle A = \angle C$。

由 $\angle A = \angle C$ 可得 $|AB| = |BC|$，代入 $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$ 可得 $|AB| = |BC| = |AC|$，即

$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$。

9．（1）给出 z_1, z_2, z_3 三点共线的充要条件；（2）给出 z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆的充要条件。

（1）若三点共线，则矢量 $z_1 - z_3$ 与矢量 $z_2 - z_3$ 平行，反之也成立。所以三点共线的充要条

件是 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = $ 实数。

（2）
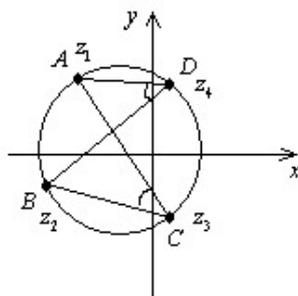
如图若四点共圆，则有 $\angle ACB = \angle ADB$ （同弧所对圆周角相等）。反之也成立。写成复数

形式即为 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \bigg/ \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = $ 实数。

10．求下列方程的根，并在复平面上画出它们的位置。

（1） $z^2 + 1 = 0$ ；（2） $z^3 + 8 = 0$ ；（3） $z^4 - 1 = 0$ ；（4） $z^4 + 1 = 0$ ；（5） $z^{2n} + 1 = 0$ ， n 为

正整数；（6） $z^2 + 2z\cos\lambda + 1 = 0$ ， $0 < \lambda < \pi$ 。

（1） $z = \pm i$ ；　　　　（2） $z = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}, -2$ ；　　（3） $z = \pm 1, \pm i$ ；　　（4） $z = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$ ；
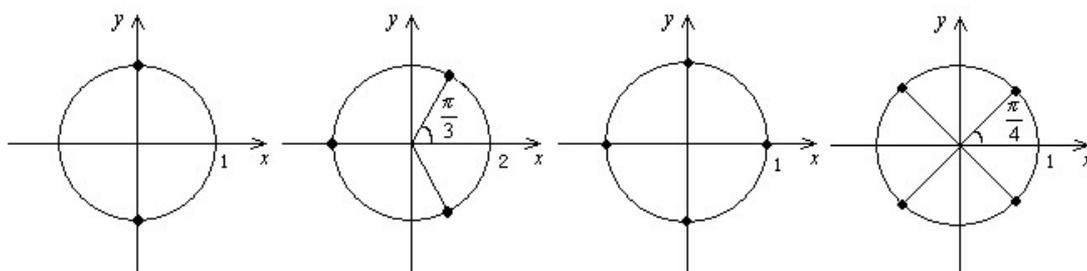
（5） $z = e^{i(\pi + 2k\pi)/2n}$ ， $k = 0, 1, \cdots, 2n-1$ ；

（6） $z = -e^{\pm i\lambda}$ 。
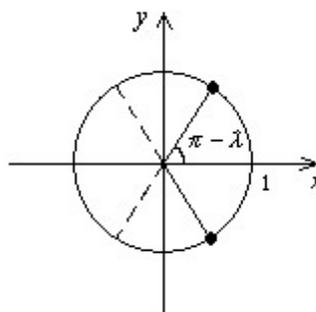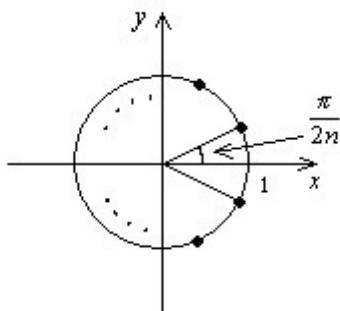
11．设 $z = p + iq$ 是实系数方程 $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$ 的根，证明 $\bar{z} = p - iq$ 也是此方程的根。

对方程两边取共轭得 $a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \cdots + a_n \bar{z}^n = 0$，即 $\bar{z}$ 也满足此方程。

12．证明：$\sin^4 \varphi = \dfrac{1}{8}\left(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3\right)$。

$$e^{4i\varphi} - 4e^{2i\varphi} + 3 = e^{4i\varphi} - 1 + 4\left(1 - e^{2i\varphi}\right) = e^{2i\varphi}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) - 4e^{i\varphi}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

$$= 2ie^{2i\varphi}\sin 2\varphi - 8ie^{i\varphi}\sin\varphi = 2i\left(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right)\sin 2\varphi - 8i\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\sin\varphi$$

$$= 8\sin^4\varphi + i\left(\sin 4\varphi - 4\sin 2\varphi\right)$$

取等式两边实部即得证。

13．把 $\sin n\varphi$ 和 $\cos n\varphi$ 用 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 表示出来。

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! \, i^k}{k!(n-k)!}\cos^{n-k}\varphi \sin^k\varphi$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}\cos^{n-2k}\varphi \sin^{2k}\varphi$$

$$+ i\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \frac{n!}{(2k+1)!(n-2k-1)!}\cos^{n-2k-1}\varphi \sin^{2k+1}\varphi$$

比较两边实部和虚部得：

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}\cos^{n-2k}\varphi \sin^{2k}\varphi \; ;$$

$$\sin n\varphi = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \frac{n!}{(2k+1)!(n-2k-1)!}\cos^{n-2k-1}\varphi \sin^{2k+1}\varphi \; 。$$

14．将下列和式表示成有限形式：（1）$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\varphi$；（2）$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\varphi$。

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ik\varphi}=e^{i\varphi}\frac{1-e^{in\varphi}}{1-e^{i\varphi}}=e^{i\varphi}\frac{e^{i\frac{n\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{n\varphi}{2}}-e^{-i\frac{n\varphi}{2}}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)}=e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}\frac{\sin\dfrac{n\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$$

比较两边实部和虚部得：

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi=\frac{\sin\dfrac{n\varphi}{2}\cos\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\ ,\quad\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi=\frac{\sin\dfrac{n\varphi}{2}\sin\dfrac{(n+1)}{2}\varphi}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\ \text{。}$$

15．证明：$\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\cdots\cdot\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$。

记 $1,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$ 为方程 $z^n=1$ 的 n 个根，即 $z_k=e^{i\frac{2k}{n}\pi}$，$k=1,2,\cdots,n-1$。则有

$$z^n-1=(z-1)(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})，$$

所以 $(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})=\dfrac{z^n-1}{z-1}=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1$。

令上式两边 $z=1$，则有 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{i\frac{2k}{n}\pi}\right)=n$。

$$1-e^{i\frac{2k}{n}\pi}=-e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)=-2ie^{i\frac{k\pi}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{k\pi}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}，$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{i\frac{2k}{n}\pi}\right)=2^{n-1}e^{-i\frac{n-1}{2}\pi+i\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n，\quad\text{即}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}\text{。}$$

16．求下列序列 $\{a_n\}$ 的聚点和极限，如果是实数序列，则同时求出上下极限。

（1）$a_n=(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}$；（2）$a_n=(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$；（3）$a_n=n+(-1)^n(2n+1)i$；

（4）$a_n=2n+1+(-1)^n ni$；（5）$a_n=\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{6}$；（6）$a_n=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cos\dfrac{n\pi}{3}$。

（1）聚点 $\pm 1/2$，极限无，上极限 $1/2$，下极限 $-1/2$；

（2）聚点 0，极限 0，上下极限 0；

（3）聚点 ∞，极限 ∞；

（4）聚点 ∞，极限 ∞；

（5）聚点 0，$\pm 1/2$，$\pm \sqrt{3}/2$，± 1，极限无；

（6）聚点 $\pm 1/2$，± 1，极限无，上极限 1，下极限 -1。

17．证明序列 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ 极限存在。

先证 $\dfrac{x}{x+1} \le \ln(1+x) \le x$，其中 $x \ge 0$。

令 $f(x) = \ln(1+x) - x$，则 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x} \le 0$，所以 $f(x) \le f(0) = 0$，不等式右半部分得证，同样可证左半部分。

由此可得 $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$。

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 0$，即 a_n 是递减序列。

由 $\dfrac{1}{n} > \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ 得 $a_n > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \ln n$

$$= \ln\left(2 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \dfrac{n+1}{n}\right) - \ln n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0$$

即 a_n 是递减有下界序列，所以极限存在。

18．证明 Lagrange 恒等式：$\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right) - \displaystyle\sum_{k<j} |z_k \overline{w}_j - z_j \overline{w}_k|^2$。

右边 $= \displaystyle\sum_{k,j} |z_k|^2 |w_j|^2 - \sum_{k<j}\left(z_k \overline{w}_j - z_j \overline{w}_k\right)\left(\overline{z}_k w_j - \overline{z}_j w_k\right)$

$= \displaystyle\sum_{k,j} |z_k|^2 |w_j|^2 - \sum_{k<j} |z_k|^2 |w_j|^2 - \sum_{k<j} |z_j|^2 |w_k|^2 + \sum_{k<j} z_k \overline{z}_j w_k \overline{w}_j + \sum_{k<j} z_j \overline{z}_k w_k \overline{w}_k$

$= \displaystyle\sum_{k,j} |z_k|^2 |w_j|^2 - \sum_{k \ne j} |z_k|^2 |w_j|^2 + \sum_{k \ne j} z_k \overline{z}_j w_k \overline{w}_j$

$= \displaystyle\sum_{k} |z_k|^2 |w_k|^2 + \sum_{k \ne j} z_k \overline{z}_j w_k \overline{w}_j = \sum_k z_k w_k \sum_j \overline{z_j w_j}$

$= \displaystyle\sum_k z_k w_k \overline{\sum_k z_k w_k} = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 = $ 左边。

19. 试证明：从条件 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ 可以导出 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = A$。又当 $A = \infty$ 时上述结论还正确吗？

由 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ 知对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在整数 N_1，使得当 $n > N_1$ 时有 $\left| z_n - A \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$。

对于给定的 N_1，存在 N_2，使得 $\dfrac{\left| z_1 - A \right| + \left| z_2 - A \right| + \cdots + \left| z_{N_1} - A \right|}{N_2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$。当 $n > N = \max\left(N_1, N_2 \right)$

时，$\left| \dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} - A \right| = \dfrac{1}{n} \left| \left(z_1 - A \right) + \left(z_2 - A \right) + \cdots + \left(z_n - A \right) \right|$

$$\leq \dfrac{1}{n} \left(\left| z_1 - A \right| + \left| z_2 - A \right| + \cdots + \left| z_{N_1} - A \right| \right) + \dfrac{1}{n} \left(\left| z_{N_1+1} - A \right| + \left| z_{N_1+2} - A \right| + \cdots + \left| z_n - A \right| \right)$$

$$< \dfrac{\left| z_1 - A \right| + \left| z_2 - A \right| + \cdots + \left| z_{N_1} - A \right|}{N_2} + \dfrac{1}{n - N_1} \left(\left| z_{N_1+1} - A \right| + \left| z_{N_1+2} - A \right| + \cdots + \left| z_n - A \right| \right)$$

$$< \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{1}{n - N_1} \left(n - N_1 \right) \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = A$。

20．设 $z = x + iy$，$z_0 = x_0 + iy_0$，$c = a + ib$，并且已知 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，证明

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c \text{ 与 } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b \text{ 等价。}$$

由于 $|f - c| = |(u - a) + i(v - b)|$，所以 $|u - a|(\text{或} |v - b|) \le |f - c| \le |u - a| + |v - b|$。

若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$，对于任意的 $\varepsilon > 0$，则存在 δ，当 $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$，

就有 $|u - a|(\text{或} |v - b|) \le |f - c| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a$，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b$。

同样的，若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a$，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b$，就有 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$。

21．证明：$f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内连续但不一致连续。

易证 $f(z)$ 连续（初等函数）。下面证 $f(z)$ 在单位圆内不一致连续。

定义在 D 上的函数 $f(z)$ 在 D 上一致连续的充要条件：任意的 $\{x_n\} \subset D$，$\{y_n\} \subset D$，只

要 $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n - y_n) = 0$，就有 $\lim\limits_{n \to \infty}\left[f(x_n) - f(y_n)\right] = 0$

令 $x_n = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}$，$y_n = \sqrt{1 - \dfrac{2}{n}}$，则 $x_n - y_n = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{n}}} \to 0$，

$f(x_n) - f(y_n) = \dfrac{n}{2} \to \infty$。所以 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内不一致连续。

22．证明下列函数在 $z = 0$ 点连续：

（1）$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\left[\operatorname{Re}(z^2)\right]^2}{z^2}, z \ne 0 , \\ 0, z = 0 \end{cases}$ （2）$f(z) = |z|$。

（1）在 $z \ne 0$ 处，$|f(z)| = \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{|x^2 - y^2 + 2ixy|} \le \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{|x^2 - y^2|} = |x^2 - y^2|$，

$\lim\limits_{z \to 0}|f(z)| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}|x^2 - y^2| = 0$，即 $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = f(0)$，所以 $f(z)$ 在 $z = 0$ 点连续。

（2）$\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0)$。

23．判断下列函数在何处可导（并求出导数），在何处解析：

（1）$|z|$；（2）$\bar{z}$；（3）z^m，$m = 0,1,2,\cdots$；（4）e^z；（5）$(x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$；

（6）$(x - y)^2 + 2i(x + y)$；（7）$z\,\mathrm{Re}\,z$；（8）$1/z$；（9）$\cos z$；（10）$\mathrm{sh}z$。

由可导充分条件（25 题）判别：
（1）全平面不可导，不解析；
（2）全平面不可导，不解析；

（3）全平面可导，解析，$\left(z^m\right)' = mz^{m-1}$；

（4）全平面可导，解析，$\left(e^z\right)' = e^z$；

（5）除（-1，-1）点可导外，全平面其余处处不可导，全平面不解析；
（6）除 y=x-1 的线上处处可导外，其余点不可导，全平面不解析；

（7）z=0 点可导，$\left(z\,\mathrm{Re}\,z\right)'\Big|_{z=0} = 0$，其余处处不可导，全平面不解析；

（8）除 z=0 点外在扩充全平面上可导，解析，$\left(1/z\right)' = -1/z^2$；

（9）全平面可导，解析，$\left(\cos z\right)' = -\sin z$；

（10）全平面可导，解析，$\left(\mathrm{sh}\,z\right)' = \mathrm{ch}\,z$。

24．证明极坐标下的 Cauchy-Riemann 条件：$\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$，$\dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$。

由变换关系 $x = \rho\cos\varphi$，$y = \rho\sin\varphi$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi \, , \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi + \rho\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi \, ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi \, , \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi + \rho\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi \, 。$$

变换得 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi$ ，   （1）

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi , \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi , \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi 。 \tag{4}$$

代入直角坐标的 C-R 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ ， $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 有

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi = \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi , \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi = -\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi 。 \tag{6}$$

（5）$\times\cos\varphi +$（6）$\times\sin\varphi$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$ ，

（5）$\times\sin\varphi -$（6）$\times\cos\varphi$ 得 $\dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ 。

25．证明：若函数 $f(z)$ 的偏导数在 $z = z_0$ 点连续，且满足 C-R 方程，则 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 点可导。

由 $f(z)$ 的偏导数在 $z = z_0$ 点连续可知 $u(x, y)$ ， $v(x, y)$ 在 $z = z_0$ 点可微，所以有

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}\Delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}\Delta y + \varepsilon_1 ,$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}\Delta x + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}\Delta y + \varepsilon_2 。$$

上面的 ε_1 ， ε_2 是 $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 的高阶无穷小。记 $a = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$ ，

$b = -\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ ，则以上两式写成

$$u(z_0 + \Delta z) - u(z_0) - a\Delta x + b\Delta y = \varepsilon_1 ,$$

$$v\left(z_{0}+\Delta z\right)-v\left(z_{0}\right)-b\Delta x-a\Delta y=\varepsilon_{2}。$$

$$\left|\frac{f\left(z_{0}+\Delta z\right)-f\left(z_{0}\right)}{\Delta z}-\left(a+ib\right)\right|=\left|\frac{f\left(z_{0}+\Delta z\right)-f\left(z_{0}\right)-a\Delta z-ib\Delta z}{\Delta z}\right|$$

$$=\left|\frac{u\left(z_{0}+\Delta z\right)-u\left(z_{0}\right)-a\Delta x+b\Delta y+i\left[v\left(z_{0}+\Delta z\right)-v\left(z_{0}\right)-b\Delta x-a\Delta y\right]}{\Delta z}\right|$$

$$=\left|\frac{\varepsilon_{1}+i\varepsilon_{2}}{\Delta z}\right|\leq\frac{\left|\varepsilon_{1}\right|}{\left|\Delta z\right|}+\frac{\left|\varepsilon_{2}\right|}{\left|\Delta z\right|}$$

当 $\Delta z\to0$ 时， $\dfrac{f\left(z_{0}+\Delta z\right)-f\left(z_{0}\right)}{\Delta z}\to a+ib$ ，即 $f(z)$ 在 $z=z_{0}$ 点可导。

26．设 $f\left(z\right)=\begin{cases}\dfrac{z^{5}}{|z|^{4}},z\neq0\\0,z=0\end{cases}$ 。（1）证明：当 $z\to0$ 时， $\dfrac{f\left(z\right)}{z}$ 的极限不存在；（2）若

$u=\operatorname{Re}f\left(z\right)$ ， $v=\operatorname{Im}f\left(z\right)$ ，证明： $u\left(x,0\right)=x$ ， $v\left(0,y\right)=y$ ， $u\left(0,y\right)=v\left(x,0\right)=0$ ；

（3）证明： u ， v 的偏导数存在，且 C-R 方程成立，但（1）中已证明 $f'\left(0\right)$ 不存在，这个结论和 25 题矛盾吗？

（1） $z\neq0$ 时， $\dfrac{f\left(z\right)}{z}=\dfrac{z^{4}}{|z|^{4}}=\dfrac{\left(x^{2}-y^{2}\right)^{2}-4x^{2}y^{2}+4ixy\left(x^{2}-y^{2}\right)}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}$ 。在直线 $y=kx$ 上

$$\frac{f\left(z\right)}{z}=\frac{\left(1-k^{2}\right)^{2}-4k^{2}+4ik\left(1-k^{2}\right)}{\left(1+k^{2}\right)^{2}}，$$ 可见 z 沿不同直线趋于 0 将有不同极限值，所以

$\dfrac{f\left(z\right)}{z}$ 的极限不存在。

（2） $z\neq0$ 时， $f\left(z\right)=\dfrac{x^{5}-10x^{3}y^{2}+5xy^{4}+i\left(5x^{4}y-10x^{2}y^{3}+y^{5}\right)}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}$ 。

所以 $u=\begin{cases}\dfrac{x^{5}-10x^{3}y^{2}+5xy^{4}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}},\left(x,y\right)\neq0\\0,\left(x,y\right)=0\end{cases}$ ， $v=\begin{cases}\dfrac{5x^{4}y-10x^{2}y^{3}+y^{5}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}},\left(x,y\right)\neq0\\0,\left(x,y\right)=0\end{cases}$ 。

容易看出 $u\left(x,0\right)=x$ ， $v\left(0,y\right)=y$ ， $u\left(0,y\right)=v\left(x,0\right)=0$ 。

（3）仿（1）的方法，u，v 在 $z=0$ 处的偏导数不存在。

27．利用极坐标下的 C-R 方程（24 题）证明：$f'(z)=\dfrac{\rho}{z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+i\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}-i\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$。

利用 24 题（1）（3）式，

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-i\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi$$

代入极坐标 C-R 方程，

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-i\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi$$

$$=\frac{\rho}{z}(\cos\varphi+i\sin\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-i\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi\right)$$

$$=\frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)$$

再利用极坐标 C-R 方程有 $f'(z)=\dfrac{\rho}{z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+i\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}-i\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$。

28．设 $\rho=\rho(x,y)$，$\varphi=\varphi(x,y)$ 是实变量 x,y 的实函数。若 $f(z)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 是

$z=x+iy$ 的解析函数，证明：$\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$，$\dfrac{\partial \rho}{\partial y}=-\rho\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial x}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}，$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}，\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \rho}{\partial y}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}。$$

由 C-R 方程可得：

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial y}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}，\qquad\qquad （1）$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi+\rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}。\qquad\qquad （2）$$

（1）$\times\cos\varphi+$（2）$\times\sin\varphi$ 得 $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$，

（1）$\times\sin\varphi-$（2）$\times\cos\varphi$ 得 $\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=-\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$。

29．设 $r=r(\rho,\varphi)$，$\theta=\theta(\rho,\varphi)$ 是实变数 ρ,φ 的实函数。若 $f(z)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 解

析，其中 $z=\rho e^{i\varphi}$，试证：$\dfrac{\partial r}{\partial\rho}=\dfrac{r}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}$，$\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}=-\rho r\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}$。

$\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{\partial r}{\partial\rho}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}$，$\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}$，

$\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{\partial r}{\partial\rho}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}$，$\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}$。

由极坐标 C-R 方程（24 题）得：

$$\dfrac{\partial r}{\partial\rho}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\theta+\dfrac{r}{\rho}\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}，\tag{1}$$

$$\dfrac{\partial r}{\partial\rho}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\theta+\dfrac{r}{\rho}\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}。\tag{2}$$

（1）$\times\cos\varphi+$（2）$\times\sin\varphi$ 得 $\dfrac{\partial r}{\partial\rho}=\dfrac{r}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}$，

（2）$\times\sin\varphi-$（1）$\times\cos\varphi$ 得 $\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}=-\rho r\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}$。

30．若函数 $f(z)=u+iv$ 在 G 内解析，且 $f(z)\neq$ 常数，试讨论下列函数是否也是 G 内的

解析函数：（1）$u-iv$；（2）$-u-iv$；（3）$-v+iu$；（4）$v+iu$。

由 C-R 方程判断，（2）（3）解析，（1）（4）不解析。

31．设 $z=x+iy$，已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部或虚部如下，试求其导

数 $f'(z)$：（1）$u=e^{-y}\cos x$；（2）$u=\mathrm{ch}\,x\cos y$；（3）$v=\sin x\,\mathrm{sh}\,y$；（4）$v=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；

（5）$u=\ln(x^2+y^2)$；（6）$v=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$。

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-e^{-y}\sin x$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{-y}\cos x$，

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}\left(-\sin x + i\cos x\right) = ie^{-y+ix} = ie^{iz};$$

（2）$f'(z) = \operatorname{sh} z$；（3）$f'(z) = \sin z$；（4）$f'(z) = -\dfrac{i}{z^2}$；（5）$f'(z) = \dfrac{2}{z}$；

（6）$f'(z) = 3(2+i)z^2$。

32．根据下列条件确定解析函数 $f(z) = u + iv$。

（1）$u = x + y$；（2）$u = \sin x \operatorname{ch} y$；（3）$v = \dfrac{x}{x^2+y^2}$；（4）$v = \arctan\dfrac{y}{x}$。

（1）$dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy = -\dfrac{\partial u}{\partial y}dx + \dfrac{\partial u}{\partial x}dy = d(y-x)$，所以 $v = y - x + C$（C 为实常数），

$$f = u + iv = (1-i)x + (1+i)y + iC = (1-i)z + iC;$$

（2）$f = \sin z + iC$；（3）$f = \dfrac{i}{z} + C$；（4）$f = \ln z + C$。

33．若 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 解析，且 $u(x,y) - v(x,y) = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$，求 $f(z)$。

由已知可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = x^2 + 4xy + y^2 + (x-y)(2x+4y)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = -(x^2 + 4xy + y^2) + (x-y)(4x+2y)$，

再由 C-R 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$。由以上四式可解出：

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 6xy$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 3(x^2 - y^2)$。

解出 $u = 3x^2y - y^3 + C_1$，$v = 3xy^2 - x^3 + C_2$，由已知条件可确定 $C_1 = C_2 = C$。

$$f(z) = u + iv = 3x^2y - y^3 + i(3xy^2 - x^3) + (1+i)C = iz^3 + (1+i)C$$

34．若 $u(x,y)$ 具有连续三阶偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，证明函数 $\dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 解析。

令 $U = \dfrac{\partial u}{\partial x}$，$V = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$，则 $\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，$\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$，

即该函数满足 C-R 方程，所以解析。

35．如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都是调和函数，讨论下列函数是否也是调和函数：

（1）$U = u[v(x, y), 0]$；（2）$U = u[0, v(x, y)]$；（3）$U = u(x, y) v(x, y)$；

（4）$U = u(x, y) + v(x, y)$。

（1）$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v, 0)} \dfrac{\partial v}{\partial x}$，　　　$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(v, 0)} \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v, 0)} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v, 0)} \dfrac{\partial v}{\partial y}$，　　　$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(v, 0)} \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v, 0)} \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$。

$$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(v, 0)} \left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v, 0)} \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$= \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(v, 0)} \left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

上式右边一般不等于 0，所以不是调和函数。

（2）$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(0, v)} \left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$，　不是调和函数。

（3）$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} v + 2 \dfrac{\partial u}{\partial x} \dfrac{\partial v}{\partial x} + u \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，　$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} v + 2 \dfrac{\partial u}{\partial y} \dfrac{\partial v}{\partial y} + u \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$，

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$，　不是调和函数。

（4）$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，　$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$，　$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$，是调和函数。

36．假设函数 $f(z)$ 在区域 G 内任意一点都满足 $f'(z) = 0$，证明 $f(z)$ 在 G 内为常数。

$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$，即 u，v 都是常数，$f(z)$ 为常数。

37. 若 $f(z)$ 在区域 G 内解析，且 $\operatorname{Im} f(z) = 0$，证明 $f(z)$ 在 G 内为常数。

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$，所以 u 为常数，又 $v = 0$，所以 $f(z)$ 在 G 内为常数。

38. 若 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在区域 G 内解析，且 $au + bv = c$，其中 a, b, c 是不为 0 的实常数，证明 $f(z)$ 在 G 内为常数。如果 a, b, c 是不为 0 的复常数，结论还成立吗？

由已知可得 $a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$，$a\dfrac{\partial u}{\partial y} + b\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$，代入 C-R 方程，

$a\dfrac{\partial u}{\partial x} - b\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$，$a\dfrac{\partial u}{\partial y} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$，两式消去 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 得 $(a^2 + b^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$，由于 a, b 为

实数，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$。同样可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$，所以 $f(z)$ 为常数。如果 a, b, c 是复数，

结论不成立。

39. 若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $z = a$ 点解析，且 $f(a) = g(a) = 0$，而 $g'(a) \neq 0$，试证：

$\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$。

$\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} \bigg/ \dfrac{g(z) - g(a)}{z - a} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$。

40. 设 z 沿着从原点出发的射线运动，其模无限增大，试讨论函数 e^z 的变化趋势。

$e^z = e^x e^{iy}$，若 $x > 0$（即 $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$），$e^z \to \infty$。

若 $x < 0$（即 $\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}$），$e^z \to 0$。

若 $x = 0$（即 $\arg z = \pm\dfrac{\pi}{2}$），$e^z$ 的实部虚部在 $[-1,1]$ 之间振荡。

41. 证明下列公式：

（1） $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$；

（2） $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$；

（3） $\text{sh}\, z = -i \sin iz$；

（4） $\text{ch}\, z = \cos iz$；

（5） $\cos^{-1} z = -i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$；

（6） $\tan^{-1} z = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$；

（7） $\text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$；

（8） $1 - \text{th}^2 z = \text{sech}^2 z$。

（1） $\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \dfrac{\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right)}{4i}$

$$= \frac{e^{i(z_1 + z_2)} - e^{-i(z_1 + z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2)$$

同样得， $\sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 = \sin(z_1 - z_2)$

（2） $\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \dfrac{\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right)}{4}$

$$= \frac{e^{i(z_1 + z_2)} + e^{-i(z_1 + z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2)$$

同样得， $\cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 - z_2)$

（3） $\text{sh}\, z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}}{2} = -i\dfrac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = -i \sin iz$

（4） $\text{ch}\, z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{-i(iz)} + e^{i(iz)}}{2} = \cos iz$

（5）令 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$， 则 $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$， 解出 $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$，

所以 $\cos^{-1} z = w = -i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

（6）令 $z = \tan w = -i\dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$， 解出 $e^{2iw} = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$。 所以 $\tan^{-1} z = w = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$

（7）$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \dfrac{\left(e^z + e^{-z}\right)^2 - \left(e^z - e^{-z}\right)^2}{4} = 1$

（8）$1 - \operatorname{th}^2 z = 1 - \left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right)^2 = \dfrac{4}{\left(e^z + e^{-z}\right)^2} = \operatorname{sech}^2 z$

42．证明下列公式：（1）$\left(\operatorname{sh} z\right)' = \operatorname{ch} z$；（2）$\left(\operatorname{ch} z\right)' = \operatorname{sh} z$；

（3）$\left(\operatorname{th} z\right)' = \operatorname{sech}^2 z$；（4）$\left(\operatorname{cth} z\right)' = -\operatorname{csch}^2 z$

（1）$\left(\operatorname{sh} z\right)' = \left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$

（2）$\left(\operatorname{ch} z\right)' = \left(\dfrac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z$

（3）$\left(\operatorname{th} z\right)' = \left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right)' = \dfrac{\left(e^z + e^{-z}\right)^2 - \left(e^z - e^{-z}\right)^2}{\left(e^z + e^{-z}\right)^2} = \left(\dfrac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^2 = \operatorname{sech}^2 z$

（4）$\left(\operatorname{cth} z\right)' = \left(\dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\right)' = \dfrac{\left(e^z - e^{-z}\right)^2 - \left(e^z + e^{-z}\right)^2}{\left(e^z - e^{-z}\right)^2} = -\left(\dfrac{2}{e^z - e^{-z}}\right)^2 = -\operatorname{csch}^2 z$

43．证明下列不等式：（1）$\left|\operatorname{sh} y\right| \le \left|\sin\left(x + iy\right)\right| \le \operatorname{ch} y$；

（2）$\left|\operatorname{sh} y\right| \le \left|\cos\left(x + iy\right)\right| \le \operatorname{ch} y$。

（1）$\sin\left(x + iy\right) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$，

所以 $\left|\sin\left(x + iy\right)\right| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y}$。

代入 $\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y$ 得 $\left|\sin\left(x + iy\right)\right| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \ge \operatorname{sh} y$，

代入 $\operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1$ 得 $\left|\sin\left(x + iy\right)\right| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x} \le \operatorname{ch} y$。不等式得证。

（2）同（1）。

44．解下列方程：（1）$\operatorname{sh} z = 0$；（2）$2\operatorname{ch}^2 z - 3\operatorname{ch} z + 1 = 0$；（3）$\sin^2 z - \dfrac{5}{2}\sin z + 1 = 0$；

（4） $\tan z = i$ 。

（1） $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = 0$，即 $e^{2z} = 1 = e^{i2k\pi}$，所以 $z = ik\pi$，（ $k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$）；

（2）解得 $\operatorname{ch} z = 1$ 或 $1/2$，即 $e^{2z} = 1 = e^{i2k\pi}$ 或 $e^z = \dfrac{1}{2} \pm i \dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i(\pm \pi/3 + 2k\pi)}$，所以 $z = ik\pi$，

$i\left(\pm \pi/3 + 2k\pi \right)$，（ $k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$）；

（3） $z = \pi/6 + 2k\pi$，$5\pi/6 + 2k\pi$，$\pi/2 - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi$，（ $k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$）；

（4）无解。

46．扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 经变换 $w = z^3$ 后边成什么区域？（上半平面）

47. 试证：圆 $A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0$ 经变换 $w = \dfrac{1}{z}$ 后仍为圆，并讨论 $A = 0$ 及 $D = 0$ 的情况。

由于 $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$，$x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$，$y = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$，圆方程可写为

$A z\bar{z} + \dfrac{1}{2}(B - iC)z + \dfrac{1}{2}(B + iC)\bar{z} + D = 0$。令 $E = \dfrac{1}{2}(B + iC)$，则方程写成

$A z\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$，这就是圆的标准方程。代入 $z = 1/w$，得到

$D w\bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0$，仍是圆方程。

$A = 0$ 时，将直线变换为圆，$D = 0$ 时，将圆变换成直线。

48．$w = e^{iz}$ 把实轴上线段 $0 \le x < 2\pi$ 变为什么图形？

由 $y = 0$ 得 $w = e^{ix}$，所以 $|w| = 1$。$0 \le x < 2\pi$ 即是 $0 \le \arg w < 2\pi$，所以变为单位圆。

49．双纽线 $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ 经变换 $w = z^2$ 后变为什么图形？

令 $z = \rho e^{i\varphi}$，则 $w = \rho^2 e^{2i\varphi}$。令 $w = re^{i\theta}$，则 $\theta = 2\varphi$，$r = \rho^2 = 2a^2 \cos\theta$，即变换为圆。

50．证明：$w = -i\dfrac{z-1}{z+1}$ 将直线 $y = ax$ 变为圆。

直线方程写为 $\overline{A}z + A\overline{z} = 0$，其中 $A = \dfrac{1}{2}(a-i)$。代入 $z = \dfrac{1+iw}{1-iw}$ 得

$aw\overline{w} + w + \overline{w} - a = 0$，即为圆方程。

51．证明：在变换 $w = \dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$ 下，z 平面上以原点为圆心，e^{β}（$\beta > 0$）为半径的圆变

为 w 平面上的椭圆，焦点为 $\pm i$，长短半轴分别为 $\mathrm{ch}\,\beta$ 及 $\mathrm{sh}\,\beta$。

令 $z = \rho e^{i\varphi}$，则圆方程为 $\rho = e^{\beta}$。

$$w = \frac{1}{2}\left(e^{\beta}e^{i\varphi} - e^{-\beta}e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{\beta}\cos\varphi + ie^{\beta}\sin\varphi - e^{-\beta}\cos\varphi + ie^{-\beta}\sin\varphi\right]$$

$$= \mathrm{sh}\,\beta\cos\varphi + i\,\mathrm{ch}\,\beta\sin\varphi$$

令 $w = x + iy$，则 $x = \mathrm{sh}\,\beta\cos\varphi$，$y = \mathrm{ch}\,\beta\sin\varphi$，消去 φ 得 $\dfrac{x^2}{\mathrm{sh}^2\,\beta} + \dfrac{y^2}{\mathrm{ch}^2\,\beta} = 1$，即以 $\pm i$ 为

焦点，$\mathrm{ch}\,\beta$ 及 $\mathrm{sh}\,\beta$ 为长短半轴的椭圆。

52．设 $w = u(x,y) + iv(x,y)$ 解析，且 $\dfrac{dw}{dz} \neq 0$，试证曲线族 $u(x,y) = C_1$，$v(x,y) = C_2$（C_1，

C_2 为任意实常数）互相正交。

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 为过点 (x,y) 的两曲线在该点的法向量，即 $\boldsymbol{n}_1 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$，$\boldsymbol{n}_2 = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$。

则 $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$，即两曲线正交。

53．判断下列函数是单值的还是多值的：

（1）$z+\sqrt{z-1}$；（2）$\dfrac{1}{1+\ln z}$；（3）$\sqrt{\cos z}$；（4）$\ln\sin z$；（5）$\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$；（6）$\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$。

明显（1）~（4）都是多值函数。

用 $\pm w$ 表示 z 的两个平方根，即 $\sqrt{z}=w$ 或 $-w$。取 $\sqrt{z}=w$，则 $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\dfrac{\cos w}{w}$，取

$\sqrt{z}=-w$，则 $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\dfrac{\cos(-w)}{-w}=-\dfrac{\cos w}{w}$，即 $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ 为多值函数，同样可得，$\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

为单值函数。

54．找出下列函数的枝点，并讨论 z 绕各个枝点移动一周回到原处函数值的变化。若同时绕两个，三个枝点，又会出现怎样的情况？

（1）$\sqrt{1-z^3}$；（2）$z+\sqrt{z^2-1}$；（3）$\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$；（4）$\dfrac{1}{1+\ln z}$；（5）$\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$；

（6）$\sqrt[3]{z^2-4}$；（7）$\sqrt[3]{z^2(z+1)}$；（8）$\ln(z^2+1)$。

（1）$w=\sqrt{1-z^3}=\sqrt{(1-z)\left(z-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)}$，当 z 逆时针绕 1 点一圈（不包围 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 和

$e^{-i\frac{2\pi}{3}}$）回到原处，因子 $\sqrt{1-z}$ 顺时针绕 0 点旋转 π，另外两个因子 $\sqrt{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ 和 $\sqrt{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

不变，故 w 顺时针绕 0 点旋转 π。当 z 逆时针绕 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$（或 $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$）点一圈（不包围另外两点）

回到原处，w 逆时针绕 0 点旋转 π。所以 1，$e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ 为枝点。若 z 逆时针绕 1 和 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 两点一

圈（不包围 $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$）回到原处，w 不变，同样的，z 逆时针绕任意两个枝点一圈（不包围另一个枝点）回到原处，w 都不变。若 z 逆时针绕这三个枝点一圈回到原处，w 顺时针绕 0 点旋转 π，所以 ∞ 也是枝点。

（2）枝点是 ± 1；

（3）枝点是 a，b（z 绕 b 逆时针一圈回到原处，因子 $\dfrac{1}{\sqrt{z-b}}$ 顺时针绕 0 点旋转 π）；

（4）枝点是 0，∞；

（5）枝点是 0，∞；

（6）枝点是 ± 2，∞；

（7）枝点是 0，-1；

（8）枝点是 $\pm i$，∞；

55. 函数 $w = z + \sqrt{z-1}$，规定 $w(2) = 1$，是分别求当 z 沿着图中的 C_1 和 C_2 连续变化时 $w(-3)$ 之值。
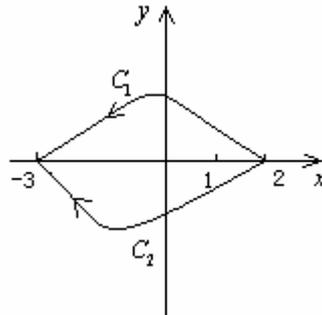
若规定 $z = 2$ 处 $\arg(z-1) = 2\pi$，则有 $w(2) = 1$。z 沿 C_1 连续变化到-3时，$\arg(z-1) = 3\pi$，所以 $w(-3) = -3 + \sqrt{4}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -3 - 2i$。沿 C_2 有 $w(-3) = -3 + 2i$。

56. 规定函数 $w = z\sqrt[3]{z-2}$ 在下图割线上岸的幅角为 0，试求该函数在割线下岸 $z = 3$ 处的数值，又问，这个函数有几个单值分枝：求出在其他分枝中割线下岸 $z = 3$ 处的函数值。
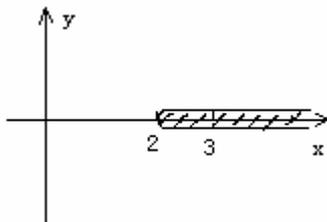
$z - 2$ 在割线上岸幅角为 0，下岸为 2π，所以 $w(3) = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$。

有三个单值分枝。规定割线上岸幅角为 2π，则下岸为 4π，$w(3) = 3e^{i\frac{4\pi}{3}}$，

规定割线上岸幅角为 4π，则下岸为 6π，$w(3) = 3$。

57. 函数 $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ 的割线有多少种可能的做法？试在两种不同做法下讨论单值分枝的规定。设 a, b 为实数，且 $a \neq b$。

a, b 为枝点，连接 a, b 的任意线段都可作为割线，所以有无穷种做法。

其中两种做法：

（1）
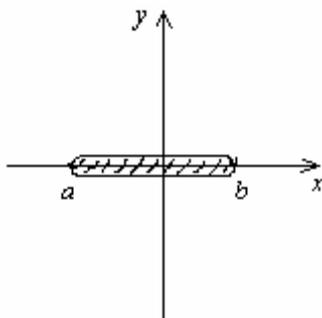
规定割线上岸 $\arg(z-a)+\arg(z-b)=\pi$ 和 3π 可得两个单枝分枝。

（2）
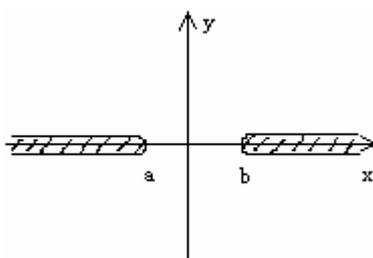
可规定正实轴割线上岸 $\arg(z-a)+\arg(z-b)$ 分别为 0，2π。

58．规定函数 $w=\sqrt{z^2-2z+2}$，$w(0)=\sqrt{2}$。求当 z 由原点出发沿圆 $\left|z-(1+i)\right|=\sqrt{2}$ 逆时针方向通过 x 轴时的函数值。又当 z 回到原点时函数之值如何？
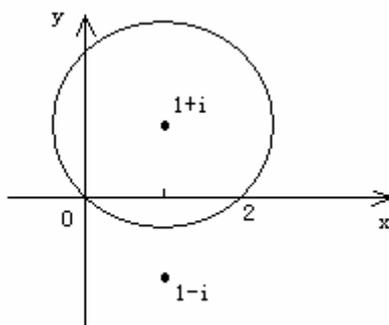
$w=\sqrt{\left(z-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)\left(z-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)}$ 。只要规定 $z=0$ 时 $\arg\left(z-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$ 就有 $w(0)=\sqrt{2}$ 。当 z 沿圆逆时针到达 $z=2$ 时，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $w(2)=\sqrt{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\cdot\sqrt{2}e^{i\pi/4}}=\sqrt{2}$ 。当 z 回到原点时，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)=\dfrac{5\pi}{4}$，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$，所以

$$w(0)=\sqrt{\sqrt{2}e^{i5\pi/4}\cdot\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}=\sqrt{2}e^{i\pi}=-\sqrt{2}。$$

59. 函数 $w=\ln\left(1-z^2\right)$，规定 $w(0)=0$，试讨论当 z 分别限制在以下两图中变化时，$w(3)$ 之值。

(a)

(b)
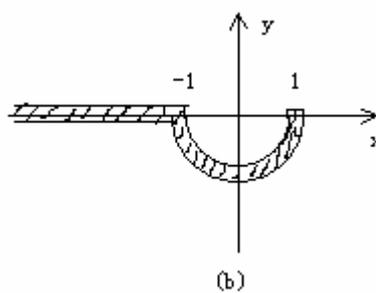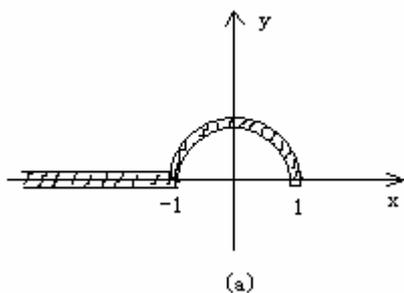
（a） $w=\ln\left[\left(1-z\right)\left(z+1\right)\right]$。规定 $z=0$ 时 $\arg\left(1-z\right)=0$，$\arg\left(z+1\right)=0$ 就有 $w(0)=0$。

z 从下半平面到达 $z=3$ 时有 $\arg\left(1-z\right)=\pi$，$\arg\left(z+1\right)=0$，所以 $w(3)=\ln\left(2e^{i\pi}\cdot 4e^{i0}\right)=3\ln 2+i\pi$。

（b） z 从上半平面到达 $z=3$ 时有 $\arg\left(1-z\right)=-\pi$，$\arg\left(z+1\right)=0$，所以 $w(3)=\ln\left(2e^{-i\pi}\cdot 4e^{i0}\right)=3\ln 2-i\pi$。

60. 函数 $w=\sqrt[4]{z\left(1-z\right)^3}$ 在割线上岸函数值与下岸函数值有何不同？割线如下图。
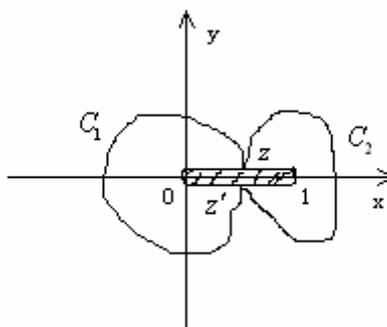
若割线上岸上一点 z 由左边（曲线 C_1）绕到割线下岸同一处（记为 z'），则 z 的辐角增加 2π，即 $z'=ze^{i2\pi}$，$1-z$ 的辐角不变，即 $\left(1-z\right)'=1-z$。所以

$$w'=\sqrt[4]{z'\left(1-z\right)'^3}=\sqrt[4]{ze^{i2\pi}\left(1-z\right)^3}=we^{i\pi/2}。$$

若 z 由右边（曲线 C_2）绕到割线下岸同一处，则 z 的辐角不变，$1-z$ 的辐角减小 2π，

$$w' = \sqrt[4]{z\left[(1-z)e^{-i2\pi}\right]^3} = we^{-i3\pi/2}。$$

61．规定 $0 \le \arg z < 2\pi$，求 $w = \sqrt{z}$ 在 $z=i$ 处的导数值。

$$w'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}，\quad w'\left(e^{i\pi/2}\right) = \frac{1}{2}e^{-i\pi/4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i)。$$

62．规定 $z=0$ 处 $\arctan z = \pi$，求在 $z=2$ 处的导数值。割线做法如图。
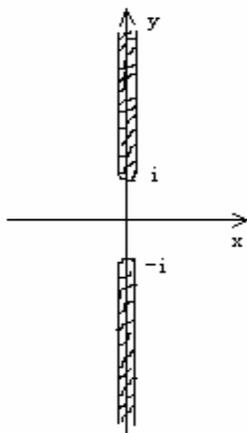
$$\arctan z = \frac{1}{2i}\ln\frac{i-z}{z+i}，\quad (\arctan z)' = \frac{1}{z^2+1}，\quad (\arctan z)'\Big|_{z=2} = \frac{1}{5}。$$

虽然导函数 $f'(z)$ 是单值函数，但它是在 $f(z)$ 的单值分枝中定义的，否则极限值

$$\lim_{z \to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$ 不定。

63．证明：若函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，其模为一常数，则函数 $f(z)$ 本身也必为一常数。

证：令 $f(z) = Ae^{i\varphi(x,y)} = A\cos\varphi + iA\sin\varphi$，其中 $\varphi(x,y)$ 为实函数。由于 $f(z)$ 解析，C-R

方程为：$-A\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，$A\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = A\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$。可由此解出 $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$，

$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$，即 $\varphi(x,y)$ 为常数，所以 $f(z)$ 为常数。

64． $f(z)=\dfrac{z^{1-p}\left(1-z\right)^{p}}{2z}$ ， $-1<p<2$ 。在实轴上沿 0 到 1 做割线，规定沿割线上岸

$\arg z=\arg(1-z)=0$ ，试计算 $f(\pm i)$ 。

$z=i$ 时， $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$ ， $\arg(1-z)=-\dfrac{\pi}{4}$ ， $f(i)=\dfrac{\left(e^{i\pi/2}\right)^{1-p}\left(2^{1/2}e^{-i\pi/4}\right)^{p}}{2i}=2^{\frac{p}{2}-1}e^{i\frac{3}{4}p\pi}$ 。

z 从左边由割线上岸绕到 $z=-i$ ，则 $\arg z=\dfrac{3\pi}{2}$ ， $\arg(1-z)=\dfrac{\pi}{4}$ ， $f(-i)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-i\frac{5}{4}p\pi}$ 。

z 从右边由割线上岸绕到 $z=-i$ ，则 $\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$ ， $\arg(1-z)=-\dfrac{7\pi}{4}$ ， $f(-i)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-i\frac{5}{4}p\pi}$ 。

65. 试按给定的路径计算下列积分：

（1）$\int_{-1}^{1} \dfrac{dz}{z}$ ，（i）沿路径 C_1：$|z|=1$ 的上半圆周，（ii）沿路径 C_2：$|z|=1$ 的下半圆周；

（2）$\int_{0}^{2+i} \operatorname{Re} z dz$ ，（i）C_1：直线段[0, 2]和[2, 2+i]组成的折线，（ii）C_2：直线段 $z=(2+i)t$ ，$0 \le t \le 1$ 。

（1）（i）$\displaystyle\int_{C_1} \dfrac{dz}{z} = \int_{\pi}^{0} \dfrac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \int_{\pi}^{0} i d\varphi = -\pi i$ ，

　　（ii）$\displaystyle\int_{C_2} \dfrac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{0} \dfrac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \int_{-\pi}^{0} i d\varphi = \pi i$ ；

（2）（i）$\displaystyle\int_{C_1} \operatorname{Re} z dz = \int_{0}^{2} x dx + i\int_{0}^{1} 2 dy = 2+2i$ ，

（ii）$\displaystyle\int_{C_2} \operatorname{Re} z dz = \int_{0}^{1} 2t d(2+i)t = 2(2+i)\int_{0}^{1} t dt = 2+i$ 。

66. 计算：（1）$\displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{dz}{z}$ ；　　（2）$\displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{dz}{|z|}$ ；　　（3）$\displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{|dz|}{z}$ ；　　（4）$\displaystyle\int_{|z|=1} \left|\dfrac{dz}{z}\right|$ 。

（1）令 $z=e^{i\varphi}$ ，$\displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{dz}{z} = \int_{0}^{2\pi} \dfrac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \int_{0}^{2\pi} i d\varphi = 2\pi i$ ；

（2）$\displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{dz}{|z|} = \int_{0}^{2\pi} de^{i\varphi} = \left.e^{i\varphi}\right|_{0}^{2\pi} = 0$ ；

（3）$\displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{|dz|}{z} = \int_{0}^{2\pi} \dfrac{|ie^{i\varphi}d\varphi|}{e^{i\varphi}} = \int_{0}^{2\pi} e^{-i\varphi}d\varphi = \left.ie^{-i\varphi}\right|_{0}^{2\pi} = 0$ ；

（4）$\displaystyle\int_{|z|=1} \left|\dfrac{dz}{z}\right| = \int_{0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ 。

67. 考虑两简单闭合曲线 C_1 ，C_2 ，彼此相交于 A，B 两点。设 C_1 与 C_2 所包围的内部区域分别是 G_1 与 G_2 ，其公共区域为 g 。若 $f(z)$ 在曲线 C_1 ，C_2 上解析，且在区域 G_1-g 及 G_2-g 内解析，试证明：$\displaystyle\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$ 。
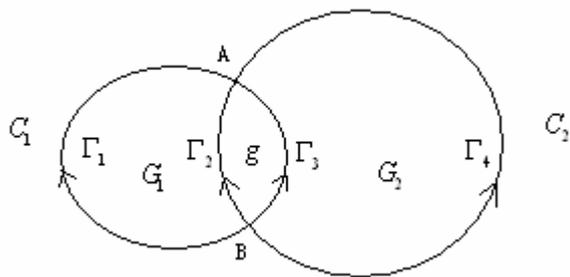
如图，$\Gamma_1 \sim \Gamma_4$ 表示四条边界线，C_1 是 Γ_1 的负向加上 Γ_3 的正向，C_2 是 Γ_2 的负向加上 Γ_4 的正向。

$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = -\int_{\Gamma_1} fdz + \int_{\Gamma_3} fdz + \int_{\Gamma_2} fdz - \int_{\Gamma_4} fdz$$

Γ_1 的负向加上 Γ_2 的正向就是 $G_1 - g$ 的边界，所以 $-\int_{\Gamma_1} fdz + \int_{\Gamma_2} fdz = 0$，

同样的，$\int_{\Gamma_3} fdz - \int_{\Gamma_4} fdz = 0$，所以有 $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$。

68．对于任一解析函数的实部或虚部，Cauchy 定理仍成立吗？如果成立，试证明之，如果不成立，试说明理由，并举一例。

不成立。取 $f(z) = z$，则实部 $u(x, y) = x$。取如下积分路径：
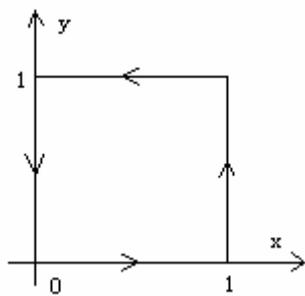
$$\oint udz = \int_0^1 xdx + i\int_0^1 dy + \int_1^0 xdx = i。$$

69．证明：$\oint_C \dfrac{dz}{z} = 4\pi i$，其中积分路径 C 为闭合曲线 $\rho = 2 - \sin^2 \dfrac{\varphi}{4}$。这个结果和围绕原点一圈 $\oint \dfrac{dz}{z} = 2\pi i$ 的结论有矛盾吗？为什么？
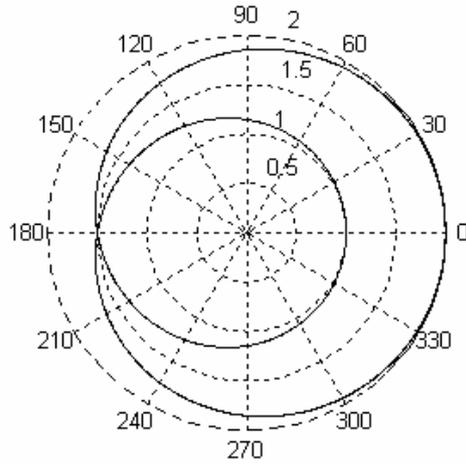
$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{4\pi} \frac{d\left[\left(2-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)e^{i\varphi}\right]}{\left(2-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)e^{i\varphi}} = \int_0^{4\pi} \frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\varphi}+i\left(2-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)e^{i\varphi}}{\left(2-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)e^{i\varphi}}d\varphi$$

$$= \int_0^{4\pi} i\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{3+\cos\frac{\varphi}{2}}d\varphi$$

上式右边第二项被积函数以 4π 为周期，所以积分限可换为 $-2\pi \sim 2\pi$，被积函数又是奇函数，故积分为 0，所以 $\oint_C \frac{dz}{z} = 4\pi i$。由上图可看出，$C$ 绕原点两圈，并不与围绕原点一圈 $\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$ 的结论矛盾。

70．计算 $\oint_{|z|=3} \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}dz$。

原式 $= \oint_{|z|=3} \frac{2z^2-15z+30}{(z-2)(z-4)^2}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{2z^2-15z+30}{(z-4)^2}\right|_{z=2} = 4\pi i$

71．计算：（1）$\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$，$C$ 分别为：(i) $|z|=\frac{1}{2}$，(ii) $|z-1|=1$，(iii) $|z|=3$；

（2）$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$，$C$ 分别为：(i) $|z-i|=1$，(ii) $|z|=2$，(iii) $|z+i|+|z-i|=2\sqrt{2}$。

（1）(i) 积分路径不包围任何奇点，故积分值为 0，

（ii）积分路径包围奇点 $z=1$， $\displaystyle\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz = 2\pi i\cdot\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\bigg|_{z=1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}i$ ，

（iii）积分路径包围奇点 $z=\pm 1$， C_1,C_2 为单独包围 $z=\pm 1$ 的闭路径，

$$\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz = \oint_{C_1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz + \oint_{C_2}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\bigg|_{z=1} + \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\bigg|_{z=-1}\right) = \sqrt{2}\pi i。$$

（2）（i） $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = 2\pi i\cdot\frac{e^{iz}}{z+i}\bigg|_{z=i} = \frac{\pi}{e}$ ，

（ii） $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\frac{e^{iz}}{z+i}\bigg|_{z=i} + \frac{e^{iz}}{z-i}\bigg|_{z=-i}\right) = -2\pi\,\mathrm{sh}1$ ，

（iii）同（ii）。

72. 计算：（1） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}dz$ ；（2） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2}dz$ ；（3） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^2}{z-1}dz$ ；（4） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^2-1}{z^2+1}dz$ ；

（5） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2}$ ；（6） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+z+1}$ ；（7） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-8}$ ；（8） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-2z+3}$ ；

（9） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{|z|e^z dz}{z^2}$ ；（10） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2\left(z^2+16\right)}$ 。

（1） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}dz = 2\pi i\cdot\cos z\big|_{z=0} = 2\pi i$ ；

（2） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2}dz = 2\pi i\left(\sin z\right)'\big|_{z=0} = 2\pi i$ ；

（3） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^2}{z-1}dz = 2\pi i\cdot z^2\big|_{z=1} = 2\pi i$ ；

（4） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^2-1}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\frac{z^2-1}{z+i}\bigg|_{z=i} + \frac{z^2-1}{z-i}\bigg|_{z=-i}\right) = 0$ ；

（5） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2} = 0$ ；

（6） $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+z+1} = 2\pi i\left(\frac{1}{z+1/2-i\sqrt{3}/2}\bigg|_{z=-1/2-i\sqrt{3}/2} + \frac{1}{z+1/2+i\sqrt{3}/2}\bigg|_{z=-1/2+i\sqrt{3}/2}\right) = 0$ ；

（7）$\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2-8}=0$；（不包围奇点）

（8）$\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2-2z+3}=2\pi i\left(\left.\dfrac{1}{z-1-i\sqrt{2}}\right|_{z=1-i\sqrt{2}}+\left.\dfrac{1}{z-1+i\sqrt{2}}\right|_{z=1+i\sqrt{2}}\right)=0$；

（9）$\oint_{|z|=2}\dfrac{|z|e^z dz}{z^2}=2\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z dz}{z^2}=\left.4\pi i\left(e^z\right)'\right|_{z=0}$；

（10）$\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2\left(z^2+16\right)}=\left.2\pi i\left(\dfrac{1}{z^2+16}\right)'\right|_{z=0}=0$。

73．（1）计算 $\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^3}dz$；（2）对于什么样的 a 值，函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z}e^t\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{a}{t^3}\right)dt$ 是单值的？

（1）$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^3}dz=\left.\dfrac{2\pi i}{2!}\left(e^z\right)''\right|_{z=0}=\pi i$；

（2）$\oint_C e^t\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{a}{t^3}\right)dt=\begin{cases}0,C\text{不包围原点}\\ (2+a)\pi i,\ C\text{包围原点}\end{cases}$。当 $a=-2$ 时，对任意的闭曲线（不过

原点）该积分都是 0，则 $F(z)$ 为单值函数。

74．证明：在挖去 $z=0$ 点的全平面上不存在一个解析函数 $f(z)$，使其满足 $f'(z)=\dfrac{1}{z}$。

这个结论和 $\dfrac{d}{dz}\ln z=\dfrac{1}{z}$ 矛盾吗？

因为 $z=0$ 点是 $\dfrac{1}{z}$ 的奇点，$\dfrac{1}{z}$ 在绕原点路径上的积分不为 0，所以无法定义变上限函数

$\int_{z_0}^{z}\dfrac{1}{t}dt$，即找不到在除去 $z=0$ 点的全平面上解析的原函数。$\ln z$ 在划定割线，在单值分枝

内才有 $\dfrac{d}{dz}\ln z=\dfrac{1}{z}$，他是在分割的平面上成立，而不是全平面。

75．设 G 是单连通区域，C 是它的边界，$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 G 内的 n 个不同的点。

$P(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$，$f(z)$ 在 G 中解析，证明：$Q(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{P(\zeta)}\dfrac{P(\zeta)-P(z)}{\zeta-z}d\zeta$

是一个 $n-1$ 次多项式，且 $Q(z_k)=f(z_k)$，$k=1,2,\cdots,n$。如果 G 是复连通区域，上述结果还正确吗？

证：$z\neq z_k$ 时，$\displaystyle Q(z)=\sum_{i=1}^{n}\left[(\zeta-z_i)\frac{f(\zeta)}{P(\zeta)}\frac{P(\zeta)-P(z)}{\zeta-z}\right]_{\zeta=z_i}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left.\frac{f(z_i)(\zeta-z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\zeta-z_j)}\right|_{\zeta=z_i}\cdot\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(z-z_j)}{z-z_i}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f(z_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(z_i-z_j)}\prod_{j\neq i}(z-z_j)\right]$$

即它是 $n-1$ 次多项式。

$z=z_k$ 时，$\displaystyle Q(z_k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_k}d\zeta=f(z_k)$。

若 G 是复连通区域，上面的计算不成立。

76. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leq R$ 的区域内解析，且 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$（$0\leq\rho<R$）为圆内一点，证明圆内的

Poisson 公式：$\displaystyle f(\zeta)=\frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\theta$。

证：$\displaystyle f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-\rho e^{i\varphi}}dRe^{i\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Rf(Re^{i\theta})}{R-\rho e^{i(\varphi-\theta)}}d\theta$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\left[R-\rho e^{-i(\varphi-\theta)}\right]}{\left[R-\rho e^{i(\varphi-\theta)}\right]\left[R-\rho e^{-i(\varphi-\theta)}\right]}f(Re^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-R\rho e^{-i(\varphi-\theta)}}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}f(Re^{i\theta})d\theta \tag{1}$$

令 $\zeta'=\dfrac{R^2}{\rho}e^{i\varphi}$，它在圆外，所以有 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\dfrac{f(z)}{z-\zeta'}dz=0$（函数 $\dfrac{f(z)}{z-\zeta'}$ 在圆内解析）。

$$0=\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-\zeta'}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-R\rho e^{-i(\varphi-\theta)}}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}f(Re^{i\theta})d\theta \tag{2}$$

（1）$-$（2）即得 $\displaystyle f(\zeta)=\frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\theta$。

77．若 $f(z)$ 在区域 G 内单值连续，且沿 G 内任一闭合路径 C 均有 $\oint_C f(z)dz = 0$，试证 $f(z)$ 在区域 G 内解析（这是 Cauchy 定理的逆定理，即 Morera 定理）。

因为 $f(z)$ 沿 G 内任一闭合路径积分都是 0，则 $\int_{z_0}^{z} f(t)dt$ 与积分路径无关，它定义了一个单值函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$。

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} \left[f(t) - f(z) \right] dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_{z}^{z+\Delta z} \left| f(t) - f(z) \right| |dt|$$

由于 $f(z)$ 在 z 点连续，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $|t - z| < \delta$ 时，$|f(t) - f(z)| < \varepsilon$，所以只要 $|\Delta z| < \delta$，对于 $t \in [z, z+\Delta z]$，有 $|t - z| \leq |\Delta z| < \delta$，

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon \text{。} 所以 F'(z) = f(z)，\ F(z) 为解析函数，$$

而解析函数的导函数仍解析，即 $f(z)$ 在区域 G 内解析。

78．考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$。（1）它对于所有不通过原点的闭合围道 C 都有积分 $\oint_C f(z)dz = 0$，但 $f(z)$ 在 $z = 0$ 点不解析。这个情况和 Morera 定理（上题）矛盾吗？
（2）当 $z \to \infty$ 时，此函数有界，但并不是一个常数。这和 Liouville 定理矛盾吗？
（1）对于过原点路径上的积分，由于 $f(0) \to \infty$，积分 $\to \infty$，并不满足 Morera 定理条件；
（2）Liouville 定理要求全平面解析。

79．设 G 为单连通区域，其边界为简单闭合曲线 C。若函数 $f(z)$ 在 $\bar{G} = G + C$ 中解析，且在 C 上，$f(z) = 0$。证明：在区域 G 内恒有 $f(z) = 0$。

由 Cauchy 积分公式 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 可证。

80．计算 $\int_C \dfrac{dz}{z}$，积分路径 C 为：（1）没有割线的 z 平面上，由 $-i$ 到 i 的各种可能路径；
（2）沿负实轴割开的 z 平面上，由 $-i$ 到 i 的各种可能路径。

（1）可计算出沿右半圆从 $-i$ 到 i 的积分值为 πi，沿左半圆从 $-i$ 到 i 的积分值为 $-\pi i$。

（a）　　　　　　　　（b）　　　　　　　　（c）
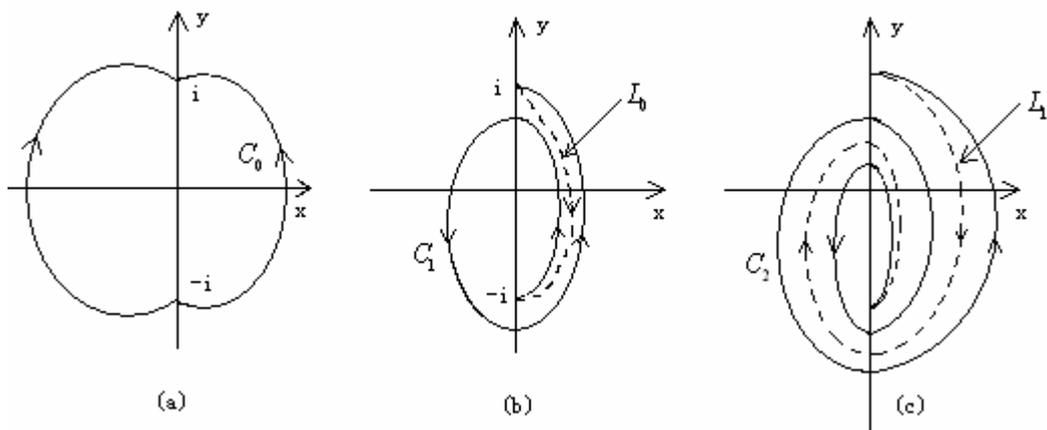
如上图（a），对于右半平面从 $-i$ 到 i 的任意路径 C_0，与 i 到 $-i$ 的右半圆构成闭合路径，该

闭路径积分值为 0，所以 $I_0 = \int_{C_0} \dfrac{dz}{z} = \pi i$。

如上图（b），C_1 为从 $-i$ 逆时针绕原点一圈后从右半平面到达 i 的曲线，记 C_1 上的积分为 I_1。

L_0 为右半平面从 i 到 $-i$ 的曲线，L_0 上的积分即为 $-I_0$。C_1 与 L_0 构成的闭曲线绕原点一圈，

所以 C_1 与 L_0 上的积分之和为 $2\pi i$，即 $I_1 - I_0 = 2\pi i$，所以 $I_1 = 3\pi i$。

如上图（c），C_2 为从 $-i$ 逆时针绕原点两圈后从右半平面到达 i 的曲线，记 C_2 上的积分为 I_2。

L_1 为从 $-i$ 逆时针绕原点一圈后从右半平面到达 i 的反向曲线，L_1 上的积分即为 $-I_1$。C_2 与

L_1 构成的闭曲线绕原点一圈，所以 $I_2 - I_1 = 2\pi i$，即 $I_2 = 5\pi i$。

依此类推，从 $-i$ 逆时针绕原点 n 圈后从右半平面到达 i 的曲线上的积分为 $I_n = (2n+1)\pi i$，

$n = 0, 1, 2, \cdots$。

同样可得，对于从 $-i$ 顺时针绕原点 n 圈后从左半平面到达 i 的曲线上的积分为

$I_n' = -(2n+1)\pi i$，$n = 0, 1, 2, \cdots$。

（2）只能由右半平面直接从 $-i$ 到 i 的路径积分，积分值为 πi。

81．证明：$\oint_C \dfrac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$，其中 C 为包围 a 点的任一简单闭合围道，n 为整数。

证：设 ε 为任意小的正数。$\displaystyle\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{d\left(a+\varepsilon e^{i\varphi}\right)}{\varepsilon^n e^{in\varphi}}=i\varepsilon^{1-n}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\varphi}d\varphi$ ，

当 $n\neq 1$ 时，$\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\varphi}d\varphi=0$ ，即 $\displaystyle\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n}=0$ ，

当 $n=1$ 时，$\displaystyle\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n}=i\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi i$ 。

对于包围 a 点的任一简单闭合围道 C，存在 ε，使 $|z-a|=\varepsilon$ 在 C 包围的区域内，则

$\displaystyle\oint_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\oint_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n}$ ，得证。

82．计算 $\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}$ 。规定 $z=1$ 时 $\sqrt{z}=1$，沿路径：（1）单位圆的上半周从 1 到-1；（2）单位圆的下半周从 1 到-1。

$z=1$ 时，$\arg z=0$ 。（1）$z=-1$ 时，$\arg z=\pi$ ，$\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}\Big|_1^{-1}=2\left(\sqrt{e^{i\pi}}-1\right)=2(-1+i)$ ；

（2）$z=-1$ 时，$\arg z=-\pi$ ，$\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}\Big|_1^{-1}=2\left(\sqrt{e^{-i\pi}}-1\right)=-2(1+i)$ 。

83．设 $f(z)$ 在区域 G 内解析，C 为 G 内任一简单闭曲线，证明对于 G 内，但不在 C 上的任一点 z ，$\displaystyle\oint_C\frac{f'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$ 。

由 Cauchy 积分公式，$\displaystyle\oint_C\frac{f'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f'(z)$ 。由解析函数高阶导数公式，

$\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta=2\pi i f'(z)$ ，得证。

84．设 $\displaystyle\Psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ ，t 是复变数。试证：$\displaystyle\frac{\partial^n\Psi(t,x)}{\partial t^n}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$ 。

证：
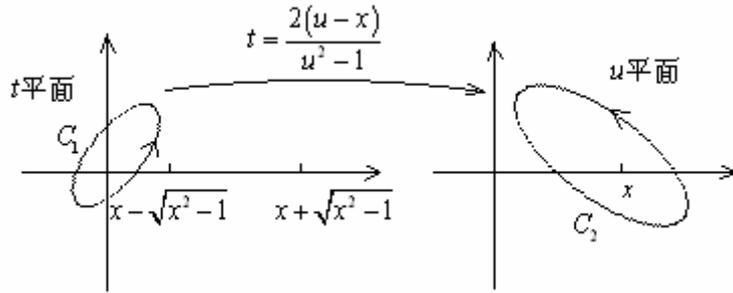
根据高阶微商公式，$\left.\dfrac{\partial^n \Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\dfrac{\Psi(t,x)}{t^{n+1}}dt = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\dfrac{1}{t^{n+1}\sqrt{1-2xt+t^2}}dt$。

上式中 C_1 是绕原点的围线，且不包围 $\Psi(t,x)$ 的两个奇点 $x\pm\sqrt{x^2-1}$。

作变换 $\sqrt{1-2xt+t^2}=1-ut$，即 $t=\dfrac{2(u-x)}{u^2-1}$，则 C_1 映射为绕 x 的 C_2（方向不变），

上面的积分化为：

$$\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\dfrac{1}{t^{n+1}\sqrt{1-2xt+t^2}}dt = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2}\left[\dfrac{(u^2-1)^{n+1}}{2^{n+1}(u-x)^{n+1}}\dfrac{u^2-1}{-u^2+2ux-1}\dfrac{-2u^2+4ux-2}{(u^2-1)^2}\right]du$$

$$= \dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2}\dfrac{(u^2-1)^n}{(u-x)^{n+1}}du = \dfrac{1}{2^n}\left.\dfrac{d^n}{du^n}(u^2-1)^n\right|_{u=x} = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n。$$

85．设 $\Psi(t,x)=\exp(2tx-t^2)$，t 是复变数，试证：$\left.\dfrac{\partial^n \Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$。

证：同上题。C_1 是 t 平面上逆时针绕原点的围线，通过变换 $t=x-u$ 映射为 u 平面上逆时针

绕 x 的围线 C_2。

$$\left.\dfrac{\partial^n \Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\dfrac{e^{2tx-t^2}}{t^{n+1}}dt = -\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2}\dfrac{e^{2(x-u)x-(x-u)^2}}{(x-u)^{n+1}}du$$

$$= (-1)^n e^{x^2}\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2}\dfrac{e^{-u^2}}{(u-x)^{n+1}}du = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

86．$f(z)$ 在 a 点的邻域内解析，当 $\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$，$z\to a$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地

趋于 k ，试证：$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=ik(\theta_2-\theta_1)$。其中 C_δ 为：$|z-a|=\delta$ ，$\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$

（逆时针）。

证：可计算出 $\int_{C_\delta}\dfrac{dz}{z-a}=i(\theta_2-\theta_1)$ ，

$$\int_{C_\delta}f(z)dz-ik(\theta_2-\theta_1)=\int_{C_\delta}f(z)dz-\int_{C_\delta}\frac{k}{z-a}dz=\int_{C_\delta}\left[(z-a)f(z)-k\right]\frac{dz}{z-a}。$$

$(z-a)f(z)$ 一致地趋于 k ，即任意 $\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}>0$ ，存在 $\delta_1>0$ （与 $\arg(z-a)$ 无关），使

$|z-a|<\delta_1$ 时，$\left|(z-a)f(z)-k\right|<\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}$ 。当 $\delta<\delta_1$ 时，对于 C_δ 上的点有 $|z-a|=\delta<\delta_1$ ，

则 $\left|\int_{C_\delta}f(z)dz-ik(\theta_2-\theta_1)\right|\le\int_{C_\delta}\left|(z-a)f(z)-k\right|\left|\dfrac{dz}{z-a}\right|<\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\cdot(\theta_2-\theta_1)=\varepsilon$

87．$f(z)$ 在 ∞ 点邻域内解析，当 $\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$ ，$z\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋于 K 。

试证：$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=iK(\theta_2-\theta_1)$。其中 C_R 为：$|z|=R$ ，$\theta_1\le\arg z\le\theta_2$ （逆时针）。

证：同上题，有 $\int_{C_R}f(z)dz-iK(\theta_2-\theta_1)=\int_{C_R}f(z)dz-\int_{C_R}\dfrac{K}{z}dz=\int_{C_R}\left[zf(z)-K\right]\dfrac{dz}{z}$ 。

任意 $\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}>0$ ，存在 $M>0$ （与 $\arg z$ 无关），当 $|z|>M$ 时，$\left|zf(z)-K\right|<\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}$ 。

只要 $R>M$ ，在 C_R 上有 $|z|=R>M$ ，所以

$$\left|\int_{C_R}f(z)dz-iK(\theta_2-\theta_1)\right|\le\int_{C_R}\left|zf(z)-K\right|\left|\frac{dz}{z}\right|<\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\cdot(\theta_2-\theta_1)=\varepsilon。$$

88．证明：$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}dz=\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$ 。从而计算出 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$ 。

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{(\cos\theta+i\sin\theta)}}{e^{i\theta}}de^{i\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta$$

上式右边第二项被积函数是奇函数，积分为 0，第一项被积函数为偶函数，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta。$$

计算上式左边的积分得 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi\,e^z\big|_{z=0}=\pi$

89，$f(z)$ 在全平面解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z}=0$，证明 $f(z)$ 为常数。

证：令 $F(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(0)}{z},z\ne0\\[2mm]f'(0),z=0\end{cases}$。$z\ne0$ 时 $F(z)$ 显然是可导的，$z=0$ 时，

$\dfrac{F(z)-F(0)}{z}=\dfrac{f(z)-f(0)-zf'(0)}{z^2}$，利用洛比达法则，

$\lim\limits_{z\to0}\dfrac{F(z)-F(0)}{z}=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{f'(z)-f'(0)}{2z}=\dfrac{1}{2}f''(0)$。即 $F(z)$ 在 $z=0$ 处也是可导的，所以

$F(z)$ 在全平面解析。因为 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z}=0$，则对于 $\varepsilon=1$，存在 $M>1$，当 $|z|>M>1$时，

有 $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|<\varepsilon=1$，$|F(z)|\le\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|+\left|\dfrac{f(0)}{z}\right|<\varepsilon+\dfrac{|f(0)|}{M}<1+|f(0)|$，即 $|F(z)|$ 有界，根

据 Liouville 定理，$F(z)$ 为常数。由于 $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z}-\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(0)}{z}=0$，所以

$F(z)=0$。由此得，$z\ne0$ 时，$F(z)=\dfrac{f(z)-f(0)}{z}=0$，$f(z)=f(0)$，即 $f(z)$ 为常

数。

90．$f(z)$ 在全平面解析，且 $|f(z)|\ge1$，证明 $f(z)$ 为常数。

证：令 $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，因为 $|f(z)|\ge1$，所以 $f(z)$ 没有零点，则 $F(z)$ 没有奇点，即 $F(z)$

在全平面解析。$|F(z)|=\dfrac{1}{|f(z)|}\le1$，即 $F(z)$ 有界，根据 Liouville 定理，$F(z)$ 为常数，

则 $f(z)$ 为常数。

91．求 $|\sin z|$ 在闭区域 $0 \le \operatorname{Re} z \le 2\pi$ ， $0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi$ 中的最大值。

由最大模原理，在边界上寻找最大值。

在 $y = 0$ ， $0 \le x \le 2\pi$ 上， $\sin z = \sin x$ ，最大值为 1 ；

在 $x = 2\pi$ ， $0 \le y \le 2\pi$ 上， $|\sin z| = |\sin(2\pi + iy)| = |\sin(iy)| = |\operatorname{sh} y|$ ，最大值为 $\operatorname{sh} 2\pi$ ；

在 $y = 2\pi$ ， $0 \le x \le 2\pi$ 上，

$|\sin z| = |\sin(x + 2\pi i)| = |\operatorname{ch} 2\pi \sin x + i \operatorname{sh} 2\pi \cos x| = \sqrt{(\operatorname{ch} 2\pi \sin x)^2 + (\operatorname{sh} 2\pi \cos x)^2}$ ，

可求出最大值为 $\operatorname{ch} 2\pi$ ；

在 $x = 0$ ， $0 \le y \le 2\pi$ 上， $|\sin z| = |\sin(iy)| = |\operatorname{sh} y|$ ，最大值为 $\operatorname{sh} 2\pi$ ；

所以最大值为 $\operatorname{ch} 2\pi$ 。

92．函数 $f(z)$ 在 G 内解析，且 z_0 为 G 内一点，有 $f'(z_0) \ne 0$ ，试证明：

$\dfrac{2\pi i}{f'(z_0)} = \oint_C \dfrac{dz}{f(z) - f(z_0)}$ 。其中 C 是以 z_0 为圆心的一个足够小的圆。

证：令 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}, & z \ne z_0 \\ \dfrac{1}{f'(z_0)}, & z = z_0 \end{cases}$ ， $z \ne z_0$ 时 $F(x)$ 显然是可导的，对于 $z = z_0$ 点，

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{(z - z_0)f'(z_0) - f(z) + f(z_0)}{f'(z_0)(z - z_0)[f(z) - f(z_0)]}$ ，

$= \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f'(z_0) - f'(z)}{f'(z_0)[f(z) - f(z_0)] + f'(z_0)f'(z)(z - z_0)}$

$= \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{-\dfrac{f'(z) - f'(z_0)}{z - z_0}}{f'(z_0)\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + f'(z_0)f'(z)} = -\dfrac{f''(z_0)}{2[f'(z_0)]^2}$ 。

即 $F(x)$ 在 $z = z_0$ 点也是可导的，所以 $F(x)$ 在在 G 内解析，因此有：

$\dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{dz}{f(z) - f(z_0)} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{F(z)}{z - z_0} dz = F(z_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$ 。

93. 函数 $f(z)$，$g(z)$ 及 $g(z)$ 的反函数均在 G 内单值解析，且 $g'(z)$ 恒不为 0，试计算

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C}\dfrac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}d\zeta$，其中 C 是 G 内的简单闭曲线，z 不在 C 上。

由于 $g(z)$ 的反函数在 G 内单值，所以当且仅当 $\zeta=z$ 时 $g(\zeta)=g(z)$，即 $\dfrac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}$ 在

G 内只有一个奇点 $\zeta=z$。

若 C 不包围 z，则 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C}\dfrac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}d\zeta=0$。

若 C 包围 z，同上题作法，令 $F(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{\zeta-z}{g(\zeta)-g(z)}f(\zeta),\zeta\neq z\\[3mm]\dfrac{f(z)}{g'(z)},\zeta=z\end{cases}$，它在 G 内解析，所以

有：$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C}\dfrac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}d\zeta=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C}\dfrac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=F(z)=\dfrac{f(z)}{g'(z)}$。

94. 设 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 皆为正项级数，试举反例，说明下列说法不对：

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，则 $\sum a_n$ 收敛；（2）若 $a_{2n} < a_{2n+1}$，则 $\sum a_n$ 发散；

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n+1}}{a_n} = \infty$，则 $\sum a_n$ 发散；（4）若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 发散，则 $\sum \sqrt{a_n b_n}$ 发散。

（1）取 $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$；（可用积分判别法断定级数 $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，$p \le 1$ 时发散）

（2）取 $a_n = \dfrac{2-(-1)^n}{n^2}$，则 $n \ge 1$ 时 $a_{2n} - a_{2n+1} = \dfrac{-8n^2+4n+1}{(2n)^2(2n+1)^2} < 0$，而 $a_n \le \dfrac{3}{n^3}$，$\sum \dfrac{3}{n^3}$

收敛，所以 $\sum a_n$ 收敛；

（3）取 $a_n = n^{-2-\frac{(-1)^n}{2}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$，而 $a_n \le n^{-\frac{3}{2}}$，$\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ 是收敛的,所以 $\sum a_n$

收敛；

（4）取 $a_n = \dfrac{1}{n^{2+(-1)^n}}$，$b_n = \dfrac{1}{n^{2-(-1)^n}}$，因为 $\sum\limits_n a_n = \sum\limits_k \dfrac{1}{(2k)^3} + \sum\limits_k \dfrac{1}{2k+1}$，右边第一个级数

收敛，第二个发散，所以 $\sum a_n$ 发散，同样的，$\sum b_n$ 也发散，而 $\sum \sqrt{a_n b_n} = \sum \dfrac{1}{n^2}$ 收敛。

95. 指出下列谬误：

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + -\cdots = 1 + \left(\dfrac{1}{2} - 2\times\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{4} - 2\times\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{5} + \left(\dfrac{1}{6} - 2\times\dfrac{1}{6}\right) + -\cdots$

$= 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \cdots$

$\qquad -2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \cdots\right)$

$= \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \cdots\right)$

$\qquad - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \cdots\right) = 0$

不能随意改变求和顺序。

96．判断下列级数的收敛性及绝对收敛性：（1）$\sum \dfrac{i^n}{\ln n}$；（2）$\sum \dfrac{i^n}{n}$。

（1）$\sum\limits_n \dfrac{i^n}{\ln n} = \sum\limits_k \dfrac{(-1)^k}{\ln(2k)} + i\sum\limits_k \dfrac{(-1)^k}{\ln(2k+1)}$，右边两个级数都收敛（用 Leibnitz 判别法），

所以 $\sum \dfrac{i^n}{\ln n}$ 收敛，因为 $\left|\dfrac{i^n}{\ln n}\right| = \dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$，而 $\sum \dfrac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum \dfrac{i^n}{\ln n}$ 不绝对收敛

（2）同上，$\sum \dfrac{i^n}{n} = \sum \dfrac{(-1)^k}{2k} + i\sum \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$，所以 $\sum \dfrac{i^n}{n}$ 收敛。$\left|\dfrac{i^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$，$\sum \dfrac{1}{n}$ 发散，所以

$\sum \dfrac{i^n}{n}$ 不绝对收敛。

97．证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$，$|z| \neq 1$ 收敛，并求其和。

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \dfrac{1}{z(1-z)}\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{1-z^n} - \dfrac{1}{1-z^{n+1}}\right)$$

$$= \dfrac{1}{z(1-z)}\left(\dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{1-z^2} + \dfrac{1}{1-z^2} - \dfrac{1}{1-z^3} + \cdots + \dfrac{1}{1-z^N} - \dfrac{1}{1-z^{N+1}}\right)$$

$$= \dfrac{1}{z(1-z)}\left(\dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{1-z^{N+1}}\right)$$

若 $|z| < 1$，$N \to \infty$ 时 $S_N(z) \to \dfrac{1}{(1-z)^2}$，若 $|z| > 1$，$S_N(z) \to \dfrac{1}{z(1-z)^2}$，即

$$S(z) = \lim_{N\to\infty} S_N(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-z)^2}, & |z| < 1 \\[3mm] \dfrac{1}{z(1-z)^2}, & |z| > 1 \end{cases}。$$

98．证明无穷乘积 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots$，（$|z| < 1$）收敛，

并求其积。

记其前 N 项部分积为 $P_N(z)$。

$$P_N(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)\cdots\left(1+z^{2^{N-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-z}(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\cdots\left(1+z^{2^{N-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-z}(1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)\cdots\left(1+z^{2^{N-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-z}(1-z^4)(1+z^4)\cdots\left(1+z^{2^{N-1}}\right) = \cdots\cdots = \frac{1-z^{2^N}}{1-z}$$

因为 $|z| < 1$，所以 $P(z) = \lim\limits_{N\to\infty} P_N(z) = \dfrac{1}{1-z}$。

99. 证明：（1）$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{2^n} = \frac{\sin z}{z}$；（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{z}{2^n} = \frac{1}{z} - \cot z$。

（1）$P_N(z) = \cos\dfrac{z}{2}\cdot\cos\dfrac{z}{2^2}\cdots\cdots\cos\dfrac{z}{2^{N-1}}\cdot\cos\dfrac{z}{2^N}$

$$= \cos\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{z}{2^{N-1}}\cdot\cos\frac{z}{2^N}\cdot\sin\frac{z}{2^N}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{z}{2^N}}$$

$$= \cos\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{z}{2^{N-1}}\cdot\sin\frac{z}{2^{N-1}}\cdot\frac{1}{2\sin\dfrac{z}{2^N}}$$

$$= \cos\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2^2}\cdots\cdots\sin\frac{z}{2^{N-2}}\cdot\frac{1}{2^2\sin\dfrac{z}{2^N}} = \cdots\cdots = \frac{\sin z}{2^N\sin\dfrac{z}{2^N}}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{2^n} = \lim_{N\to\infty}\frac{\sin z}{2^N\sin\dfrac{z}{2^N}} = \frac{\sin z}{z};$$

（2）$\cot z + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\tan\frac{z}{2^n} = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{z}{2}}{2\tan\dfrac{z}{2}} + \frac{1}{2}\tan\frac{z}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^N}\tan\frac{z}{2^N}$

$$= \frac{1}{2\tan\dfrac{z}{2}} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^N}\tan\frac{z}{2^N}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \dfrac{z}{2^2}}{2^2 \tan \dfrac{z}{2^2}} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{z}{2^2} + \frac{1}{2^3} \tan \frac{z}{2^3} \cdots + \frac{1}{2^N} \tan \frac{z}{2^N}$$

$$= \frac{1}{2^2 \tan \dfrac{z}{2^2}} + \frac{1}{2^3} \tan \frac{z}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^N} \tan \frac{z}{2^N}$$

$$= \cdots\cdots = \frac{1}{2^N \tan \dfrac{z}{2^N}}$$

令 $N \to \infty$，则 $\dfrac{1}{2^N \tan \dfrac{z}{2^N}} \to \dfrac{1}{z}$，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{z}{2^n} = \frac{1}{z} - \cot z$。

100．证明级数 $\displaystyle\sum e^{-n} \sin nz$ 在区域 $\left| \operatorname{Im} z \right| < 1$ 内解析。

证：对于任意 $p \in (0,1)$，当 $\left| \operatorname{Im} z \right| \le p$ 时，（参考习题 02 的 43 题）

$\left| e^{-n} \sin nz \right| \le e^{-n} \operatorname{ch} ny \le e^{-n} \operatorname{ch} pn = \dfrac{1}{2} \left[e^{-(1-p)n} + e^{-(1+p)n} \right]$。因为级数 $\displaystyle\sum \left[e^{-(1-p)n} + e^{-(1+p)n} \right]$

收敛，所以级数 $\displaystyle\sum e^{-n} \sin nz$ 在区域 $\left| \operatorname{Im} z \right| \le p$ 内一致收敛，由 Weierstrass 定理，级数

$\displaystyle\sum e^{-n} \sin nz$ 在区域 $\left| \operatorname{Im} z \right| < p$ 内解析。这里的 p 具有任意性。

任取区域 $\left| \operatorname{Im} z \right| < 1$ 内一点 z_0，存在 p_0 使 $\left| \operatorname{Im} z_0 \right| < p_0 < 1$。由于级数 $\displaystyle\sum e^{-n} \sin nz$ 在区域

$\left| \operatorname{Im} z \right| < p_0$ 内解析，故在 z_0 点解析。由 z_0 的任意性，$\displaystyle\sum e^{-n} \sin nz$ 在区域 $\left| \operatorname{Im} z \right| < 1$ 内解析。

101．x 为实数，证明：（1）级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ 绝对收敛，但不一致收敛；

（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$ 一致收敛，但不绝对收敛。

（1）这是正项等比级数，显然绝对收敛。记和函数为 $S(x)$，则 $S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -\dfrac{1}{1+x^2}, & x \ne 0 \end{cases}$，

$x = 0$ 处为间断点，而 $\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ 在整个实轴上是连续的，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ 不一致收敛。

（2）由于 $\dfrac{1}{n+x^2} \le \dfrac{1}{n}$ ，所以 $\dfrac{1}{n+x^2}$ 单调一致趋于 0，由 Leibnitz 判敛法可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ 一

致收敛。$\left|\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}\right| = \dfrac{1}{n+x^2}$ ，它不绝对收敛。

102．确定下列级数的收敛半径（或收敛区域）：（1）$\displaystyle\sum \dfrac{1}{n^n} z^n$ ；（2）$\displaystyle\sum \dfrac{1}{2^n n^n} z^n$ ；

（3）$\displaystyle\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$ ；（4）$\displaystyle\sum \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^n$ ；（5）$\displaystyle\sum n^{\ln n} z^n$ ；（6）$\displaystyle\sum z^n$ ；（7）$\displaystyle\sum \dfrac{1}{2^{2n}} z^{2n}$ ；

（8）$\displaystyle\sum \left(\dfrac{z}{1+z}\right)^n$ ；（9）$\displaystyle\sum (-1)^n \left(z^2 + 2z + 2\right)^n$ ；（10）$\displaystyle\sum 2^n \sin \dfrac{z}{3^n}$ ；（11）$\displaystyle\sum \dfrac{\ln\left(n^n\right)}{n!} z^n$ ；

（12）$\displaystyle\sum \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n z^n$ 。

（1）$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left|n^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} n = \infty$ ，所以收敛半径 $R = \infty$ ；

（2）$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left|2^n n^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} 2n = \infty$ ，所以收敛半径 $R = \infty$ ；

（3）$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left|\dfrac{n!}{n^n} \middle/ \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ，所以收敛半径 $R = e$ ；

（4）$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \middle/ \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)}\left[(n+1)!\right]^2}\right| = \lim_{n \to \infty} 4(n+1)^2 = \infty$ ，所以收敛半径 $R = \infty$ ；

（5）$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left|n^{\ln n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{(\ln n)^2}{n}} = 1$ ，所以收敛半径 $R = 1$ ；

（6）显然收敛半径 $R = 1$ ；

（7）$\dfrac{1}{2^{2n}} z^{2n} = \left(\dfrac{z}{2}\right)^{2n}$ ，收敛半径 $R = 2$ ；

（8）收敛域为 $\left|\dfrac{z}{1+z}\right| < 1$ ，化简得 $\operatorname{Re} z > -\dfrac{1}{2}$ ；

（9）收敛域为 $\left|z^2 + 2z + 2\right| < 1$ ；

（10）$\sum 2^n \sin \dfrac{z}{3^n}$ 在全平面收敛，即收敛域为全平面；

（11）$\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{n \ln n}{n!} \middle/ \dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+1)!} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n \ln n}{\ln(n+1)} = \infty$，所以收敛半径 $R = \infty$；

（12）$\lim\limits_{n \to \infty} \left| \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \right|^{1/n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$，所以收敛半径 $R = 1$。

103．已知幂级数 $\sum a_n z^n$ 和 $\sum b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2，试讨论下列幂级数的收敛半径：（1）$\sum (a_n + b_n) z^n$；（2）$\sum a_n b_n z^n$；（3）$\sum \dfrac{1}{a_n} z^n$；（4）$\sum \dfrac{b_n}{a_n} z^n$。

（1）设 $R_1 < R_2$。$|z| < R_1$ 时，级数收敛，$R_1 < |z| < R_2$ 时，级数发散；由阿贝尔第一定理，当 $|z| > R_2$ 时级数也发散，所以 $R = R_1$。

若 $R_1 = R_2$，$|z| < R_1 = R_2$ 时，级数收敛，$|z| > R_1 = R_2$ 时，级数有可能收敛。

综上，$R \geq \min\{R_1, R_2\}$。

（2）参考数学分析中关于上下极限的等式和不等式。

$$R = \varliminf_{n \to \infty} \dfrac{1}{|a_n b_n|^{1/n}} \geq \varliminf_{n \to \infty} \dfrac{1}{|a_n|^{1/n}} \cdot \varliminf_{n \to \infty} \dfrac{1}{|b_n|^{1/n}} = R_1 R_2；$$

（3）$R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{|a_n|^{1/n}}} \leq \dfrac{1}{\varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{|a_n|^{1/n}}} = \dfrac{1}{R_1}$；

（4）$R = \varliminf\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_n}{b_n} \right|^{1/n} \leq \varlimsup\limits_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} \cdot \varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{|b_n|^{1/n}} = \dfrac{1}{\varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{|a_n|^{1/n}}} \cdot \varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{|b_n|^{1/n}} = \dfrac{R_2}{R_1}$。

104．如果 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径为 R，试证明 $\sum (\operatorname{Re} a_n) z^n$ 的收敛半径 $R' \geq R$。

$$R' = \varliminf_{n \to \infty} \left| \dfrac{1}{\operatorname{Re} a_n} \right|^{1/n} = \varliminf_{n \to \infty} \left| \dfrac{2}{a_n + \bar{a}_n} \right|^{1/n} \geq \varliminf_{n \to \infty} \left(\dfrac{2}{|a_n| + |\bar{a}_n|} \right)^{1/n} = \varliminf_{n \to \infty} \left| \dfrac{1}{a_n} \right|^{1/n} = R$$

105．设级数 $\sum a_n$ 收敛，而 $\sum |a_n|$ 发散，证明级数 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径为 1。

$|z| < 1$ 时，存在 δ 使 $|z| < \delta < 1$，则 $|a_n z^n| < |a_n| \delta^n$。

因为 $\sum a_n$ 收敛，有 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$，对于 $\varepsilon = 1$，当 n 充分大时 $|a_n| < \varepsilon = 1$，则 $|a_n z^n| < \delta^n$，

因为 $\sum \delta^n$ 收敛，所以 $\sum a_n z^n$ 绝对收敛。

$|z| > 1$ 时，$|a_n z^n| > |a_n|$，因为 $\sum |a_n|$ 发散，所以 $\sum a_n z^n$ 发散。

106．若级数 $\sum a_n$ 收敛，而 $\sum n|a_n|$ 发散，证明级数 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径为 1。

$|z| < 1$ 时，同上题方法可证 $\sum a_n z^n$ 收敛。

$|z| > 1$ 时，存在 ζ 使 $|z| > \zeta > 1$，则 $|a_n z^n| > |a_n| \zeta^n$。因为 $\zeta > 1$，所以当 n 充分大时有 $\zeta^n > n$，

则 $|a_n z^n| > n|a_n|$，因为 $\sum n|a_n|$ 发散，所以 $\sum a_n z^n$ 发散。

107．证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 在 $|z| \le 1$ 中一致收敛，但由它逐项微商求得的级数在 $|z| < 1$ 内却不一致收敛。这个结果和 Weierstrass 定理矛盾吗？

$|z| \le 1$ 时 $\left| \dfrac{z^n}{n^2} \right| \le \dfrac{1}{n^2}$，由于 $\sum \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ 在 $|z| \le 1$ 中一致收敛。

假设 $\sum \dfrac{z^{n-1}}{n}$ 在 $|z| < 1$ 内一致收敛，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，对任意整数 p

有 $\left| \dfrac{z^n}{n+1} + \dfrac{z^{n+1}}{n+2} + \cdots + \dfrac{z^{n+p-1}}{n+p} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，（$\forall |z| < 1$）由于 $\dfrac{z^n}{n+1}$ 在全平面连续，可令 z 从单位圆

内趋于 1 得 $\lim\limits_{z \to 1} \left| \dfrac{z^n}{n+1} + \dfrac{z^{n+1}}{n+2} + \cdots + \dfrac{z^{n+p-1}}{n+p} \right| = \left| \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+p} \right| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$，即级数

$\sum \dfrac{1}{n}$ 收敛，所以假设不成立，即级数 $\sum \dfrac{z^{n-1}}{n}$ 在 $|z| < 1$ 内不一致收敛。这并不与 Weierstrass

定理矛盾，该定理结论是逐项微商求得的级数在收敛域内的闭区域上一致收敛，$|z| < 1$ 非闭区域。

108. 证明 Riemann-ζ 函数 $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^z}$ 在区域 $\mathrm{Re}\,z>1$ 内解析，并计算 $\zeta'(z)$。

证：对任意 $p>1$，当 $\mathrm{Re}\,z\ge p$ 时，$\left|\dfrac{1}{n^z}\right|=\dfrac{1}{e^{x\ln n}}\le\dfrac{1}{e^{p\ln n}}=\dfrac{1}{n^p}$。由于级数 $\sum\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，所以

$\sum\dfrac{1}{n^z}$ 在 $\mathrm{Re}\,z\ge p$ 内一致收敛，所以 $\zeta(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>p$ 内解析，逐项可导。

任取区域 $\mathrm{Re}\,z>1$ 内一点 z_0，存在 p_0 使 $\mathrm{Re}\,z_0>p_0>1$。由于 $\zeta(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>p_0$ 内解析，

逐项可导，所以 $\zeta(z)$ 在 z_0 点解析，逐项可导，由 z_0 的任意性，$\zeta(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>1$ 内解析，

逐项可导。$\zeta'(z)=\sum\left(\dfrac{1}{n^z}\right)'=-\sum\dfrac{\ln n}{n^z}$。

109. 将下列函数在指定点展成 Taylor 级数，并给出其收敛半径：

（1）$\sin z$，在 $z=n\pi$ 展开；（2）$1-z^2$，在 $z=1$ 展开；（3）$\dfrac{1}{1+z+z^2}$，在 $z=0$ 展开；

（4）$\ln z$，在 $z=i$ 展开，规定：(i) $0\le\arg z<2\pi$，(ii) $-\pi\le\arg z<\pi$，(iii) $\left(\ln z\right)_{z=i}=-\dfrac{3}{2}\pi i$；

（5）$\arctan z$ 的主值，在 $z=0$ 展开；（6）$\dfrac{\sin z}{1-z}$，在 $z=0$ 展开；

（7）$\exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$，在 $z=0$ 展开（可只求前四项系数）；（8）$\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$，在 $z=\infty$ 展开。

（1）$\left(\sin z\right)^{(k)}_{z=n\pi}=\sin\left(n\pi+\dfrac{k}{2}\pi\right)=\begin{cases}0,k=2m\\(-1)^{n+m},k=2m+1\end{cases}$

$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}\left(\sin z\right)^{(k)}_{z=n\pi}\left(z-n\pi\right)^k=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)!}\left(z-n\pi\right)^{2m+1}$；

（2）$1-z^2=-(z-1)(z+1)=-(z-1)\left[2+(z-1)\right]=-2(z-1)-(z-1)^2$；

（3）$\dfrac{1}{1+z+z^2}=\dfrac{1}{\left(z-e^{i2\pi/3}\right)\left(z-e^{-i2\pi/3}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}i}\left(\dfrac{1}{z-e^{i2\pi/3}}-\dfrac{1}{z-e^{-i2\pi/3}}\right)$

$\qquad=\dfrac{1}{\sqrt{3}i}\left(\dfrac{e^{i2\pi/3}}{1-e^{i2\pi/3}z}-\dfrac{e^{-i2\pi/3}}{1-e^{-i2\pi/3}z}\right)$

$\qquad=\dfrac{1}{\sqrt{3}i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{i2\pi/3}\left(e^{i2\pi/3}z\right)^n-e^{-i2\pi/3}\left(e^{-i2\pi/3}z\right)^n\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{i2(n+1)\pi/3} - e^{-i2(n+1)\pi/3} \right] z^n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left[\frac{2}{3}(n+1)\pi \right] z^n \quad (\,|z| < 1\,);$$

（4） $\left(\ln z \right)_{z=i}^{(k)} = \left(\frac{1}{z} \right)_{z=i}^{(k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{z^k} \bigg|_{z=i} = -\frac{(-1)^k (k-1)!}{i^k} = -\frac{i^{2k}(k-1)!}{i^k} = -i^k (k-1)!$,

（ $k = 1, 2, 3, \cdots$ ）。 $\quad \ln z = \left(\ln z \right)_{z=i} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\ln z \right)_{z=i}^{(k)} (z-i)^k = \left(\ln z \right)_{z=i} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k} (z-i)^k$,

（ $|z-i| < 1$ ）； (i)(ii) $\left(\ln z \right)_{z=i} = \frac{1}{2}\pi i$ ； (iii) $\left(\ln z \right)_{z=i} = -\frac{3}{2}\pi i$ 代入上式即可。

（5） $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-t^2 \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ ，（ $|t| < 1$ ）

对两边积分，由于幂级数在收敛域内可逐项积分，故有

$$\arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} , \quad (\,|z| < 1\,)$$

（6） $\left(\frac{\sin z}{1-z} \right)_{z=0}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{1-z} \right)_{z=0}^{(n-k)} \left(\sin z \right)_{z=0}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \sin \frac{k}{2}\pi = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^m n!}{(2m+1)!}$

$$\frac{\sin z}{1-z} = \left(\frac{\sin z}{1-z} \right)_{z=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\sin z}{1-z} \right)_{z=0}^{(n)} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^n , \qquad (\,|z| < 1\,)$$

（7）记 $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ ，则 $f(0) = e$ 。 $f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} e^{\frac{1}{1-z}}$ ， $f'(0) = e$ 。

$$f''(z) = \left[\frac{2}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1-z)^4} \right] e^{\frac{1}{1-z}} , \quad f''(0) = 3e \text{。}$$

$$f'''(z) = \left[\frac{6}{(1-z)^4} + \frac{6}{(1-z)^5} + \frac{1}{(1-z)^6} \right] e^{\frac{1}{1-z}} , \quad f'''(0) = 13e \text{。}$$

$$f^{(4)}(z) = \left[\frac{24}{(1-z)^5} + \frac{36}{(1-z)^6} + \frac{12}{(1-z)^7} + \frac{1}{(1-z)^8} \right] e^{\frac{1}{1-z}} , \quad f^{(4)}(0) = 73e \text{。}$$

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{1}{2} f''(0) z^2 + \frac{1}{6} f'''(0) z^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(0) z^4 + \cdots$$

$$= e \left(1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \frac{73}{24} z^4 + \cdots \right) \qquad (\,|z| < 1\,)$$

（8）记 $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ ，则 $f\left(\frac{1}{t} \right) = \ln \frac{t+1}{t-1} = \ln(t+1) - \ln(t-1)$ 。

$$\ln(t+1) = \ln(t+1)_{t=0} + \int_0^t \frac{1}{1+u}\,du = \ln(t+1)_{t=0} + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n\,du$$

$$= \ln(t+1)_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t u^n\,du = \ln(t+1)_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} ,\quad (|t|<1)$$

$$-\ln(t-1) = -\ln(t-1)_{t=0} + \int_0^t \frac{1}{1-u}\,du = -\ln(t-1)_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t u^n\,du$$

$$= -\ln(t-1)_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1} ,\quad (|t|<1)$$

± 1 为 $\ln\dfrac{t+1}{t-1}$ 的 两 个 枝 点 ， 以 连 接 两 点 的 线 段 为 割 线 ， 规 定 割 线 上 岸

$\arg(t+1) - \arg(t-1) = (2k+1)\pi$ ，（ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ），则

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \ln\frac{t+1}{t-1}\bigg|_{t=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n+1} t^{n+1} = (2k+1)\pi i + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n+1} ,$$

$$f(z) = (2k+1)\pi i + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{-(2n+1)} 。$$

110. 求下列级数之和：（1） $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$ ， $|z|<1$ ；（2） $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$ ， $|z|<\infty$ 。

（1）记 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$ ，则 $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$ ，（ $|z|<1$ ）

$$f(z) = f(0) + \int_0^z \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} ，\quad 为 使 \ f(0)=0 ， 规 定$$

$\ln\dfrac{1+z}{1-z}\bigg|_{z=0} = 0$ 。

（2）记 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$ ，则 $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1}$ ， $f''(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-2)!} z^{2n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}$ ，

所以有 $f''(z) - f(z) = 0$ ，由初始条件 $f(0)=1$ ， $f'(0)=0$ 解此方程得 $f(z) = \mathrm{ch}\,z$ 。

111. 验证等式 $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+2b} - \dfrac{1}{a+3b} + -\cdots = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}dt$，（$a>0, b>0$）。因此，此

类无穷级数求和就化为求定积分。利用这个办法求下列级数之和：

（1）$1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{10} + -\cdots$；（2）$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{11} + -\cdots$；（3）$1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{13} + -\cdots$。

证：$\dfrac{t^{a-1}}{1+t^b} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{a+bn-1}$，（$|t|<1$）

$$\int_0^x \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{a+bn-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}x^{a+bn}，（|x|<1）$$

由于级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{a+bn-1}$ 在区间 $|t| \le |x|$（$|x|<1$）上一致收敛，所以上式中求和与积分可交

换顺序。上式右边的幂级数在 $x=1$ 点是收敛的，所以它在 $x=1$ 点左连续（Abel 第二定理），

即 $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}x^{a+bn} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}$。左边的积分是关于 x 的连续函数，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn} = \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}x^{a+bn} = \lim_{x\to 1-0}\int_0^x \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt。$$

（1） 这里 $a=1, b=3$，所以和为

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt = \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)dt = \frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{t+1} - \frac{1}{6}\int_0^1\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln(t+1)\Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{6}\int_0^1\frac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)\Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2\right)$$

（2）$a=2, b=3$，和为 $\displaystyle\int_0^1\frac{t}{1+t^3}dt$。由于

$$\int_0^1\frac{t}{1+t^3}dt + \int_0^1\frac{1}{1+t^3}dt = \int_0^1\frac{1}{t^2-t+1}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

所以 $\int_0^1 \dfrac{t}{1+t^3}\,dt = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \int_0^1 \dfrac{1}{1+t^3}\,dt = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right)$。

（3） $a=1, b=4$ ，和为 $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^4}\,dt = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\left(\dfrac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \dfrac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)dt$

$$= \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \dfrac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \dfrac{d\left[\sqrt{2}\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]}{1+\left[\sqrt{2}\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \dfrac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \dfrac{d\left[\sqrt{2}\left(t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]}{1+\left[\sqrt{2}\left(t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2}$$

$$= \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(2+\sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) - \dfrac{\pi}{8\sqrt{2}} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(2-\sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) + \dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

$$= \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) + \operatorname{arccot}\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$$

$$= \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) + \pi\right]$$

112. 如果 k 和 n 是自然数，$a>0, b>0$ ，证明：

$$\dfrac{k!}{(a+nb)(a+nb+1)\cdots(a+nb+k)} = \int_0^1 t^{a+nb-1}\left(1-t\right)^k dt \,，并求下列级数之和：$$

（1） $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{3\cdot4\cdot5} + \dfrac{1}{5\cdot6\cdot7} + \cdots$ ； （2） $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} - \dfrac{1}{3\cdot4\cdot5} + \dfrac{1}{5\cdot6\cdot7} - +\cdots$ ；

（3） $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{4\cdot5\cdot6} + \dfrac{1}{7\cdot8\cdot9} + \cdots$ ； （4） $\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4} - \dfrac{1}{4\cdot5\cdot6} + \dfrac{1}{6\cdot7\cdot8} - +\cdots$ 。

证： $\displaystyle\int_0^x t^{p-1}\left(x-t\right)^k dt = \dfrac{1}{p}\int_0^x \left(t^p\right)'\left(x-t\right)^k dt = \dfrac{k}{p}\int_0^x t^p\left(x-t\right)^{k-1} dt$

$$= \dfrac{k(k-1)}{p(p+1)}\int_0^x t^{p+1}\left(x-t\right)^{k-2} dt$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \dfrac{k!\,x^k}{p(p+1)\cdots(p+k)}x^p$$

令 $p=a+nb$ ， $x=1$ 即可得 $\dfrac{k!}{(a+nb)(a+nb+1)\cdots(a+nb+k)} = \displaystyle\int_0^1 t^{a+nb-1}\left(1-t\right)^k dt$ 。

级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{a+nb-1}\left(x-t\right)^k dt = x^{k+a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{\left(a+bn\right)\left(a+bn+1\right)\cdots\left(a+bn+k\right)}x^{bn}$ 是幂级数。

当 $k\geq 1$ 时，$\displaystyle\sum_n\int_0^x t^{a+nb-1}\left(x-t\right)^k dt\bigg|_{x=1} = \sum_n\frac{k!}{\left(a+nb\right)\left(a+nb+1\right)\cdots\left(a+nb+k\right)}$ 显然是收敛

的，由 Abel 第二定理，幂级数 $\displaystyle\sum_n\int_0^x t^{a+nb-1}\left(x-t\right)^k dt$ 在 $x=1$ 处左连续，即下式成立：

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_n\int_0^x t^{a+nb-1}\left(x-t\right)^k dt = \sum_n\int_0^1 t^{a+nb-1}\left(1-t\right)^k dt \qquad （|x|<1）。$$

级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(a+nb\right)\left(a+nb+1\right)\cdots\left(a+nb+k\right)} = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^{a+nb-1}\left(1-t\right)^k dt$

$$= \frac{1}{k!}\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{a+bn-1}\left(x-t\right)^k dt$$

由于级数 $\displaystyle\sum_n t^{bn}$ 收敛半径为 1，所以对于 $|x|<1$，求和与积分可交换顺序，即

上式 $\displaystyle= \frac{1}{k!}\lim_{x\to 1-0}\int_0^x t^{a-1}\left(x-t\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}t^{bn}dt = \frac{1}{k!}\int_0^1\frac{t^{a-1}\left(1-t\right)^k}{1-t^b}dt$

同样可得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(a+nb\right)\left(a+nb+1\right)\cdots\left(a+nb+k\right)} = \frac{1}{k!}\int_0^1\frac{t^{a-1}\left(1-t\right)^k}{1+t^b}dt$。

（1）这里 $a=1, b=2, k=2$。和为 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^2}{1-t^2}dt$。

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^2}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{1+t}-1\right)dt = \ln 2 - \frac{1}{2};$$

（2）和为 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^2}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(1-\ln 2\right)$。

（3）$a=1, b=3, k=2$。和为 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^2}{1-t^3}dt$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]^2} - \frac{1}{4}\int_0^1\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 3\right)$$

（4）$a=2, b=2, k=2$。和为 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t\left(1-t\right)^2}{1+t^2}dt = \int_0^1\left(\frac{1}{2}t-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\pi-3\right)$。

113. 求下列函数的 Laurent 展开：（1） $\dfrac{1}{z^2(z-1)}$，在 $z=1$ 附近展开；

（2） $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$，展开区域为：(i) $1<|z|<2$ ，(ii) $2<|z|<\infty$ ；

（3） $\dfrac{1}{z(z+1)}$，展开区域为：(i) $1<|z-i|<\sqrt{2}$ ，(ii) $0<|z|<1$ ；

（4） $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$，展开区域为：(i) $3<|z|<4$ ，(ii) $4<|z|<\infty$ ；

（5） $\dfrac{e^z}{z+2}$，在 $|z|>2$ 处展开；（6） $\dfrac{1}{1-\cos z}$，在 $z=2n\pi$ 附近展开（可只求出不为 0 的前四项系数）。

（1） $\dfrac{1}{z^2}=\left[1+(z-1)\right]^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-n+1)}{n!}(z-1)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{n!}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n \qquad (|z-1|<1)$$

$$\dfrac{1}{z^2(z-1)}=(z-1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+2)(z-1)^k, \quad (0<|z-1|<1)$$

（2）(i) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-z/2}-z^{-1}\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

$$=-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}z^n-z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=-\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}z^n \qquad (1<|z|<2)$$

(ii) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=z^{-1}\dfrac{1}{1-2z^{-1}}-z^{-1}\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\sum_{k=-2}^{-\infty}\left(2^{-k-1}-1\right)z^k \qquad (2<|z|<\infty)$

（3）(i) $\dfrac{1}{z(z+1)}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+1}=(z-i)^{-1}\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{z-i}}-\dfrac{1}{1+i}\dfrac{1}{1+\dfrac{z-i}{1+i}}$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}i^{n+1}(z-i)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n \qquad (1<|z-i|<\sqrt{2})$$

(ii) $\dfrac{1}{z(z+1)}=z^{-1}-\dfrac{1}{1+z}=z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n \qquad (0<|z|<1)$

（4）(i) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1+\dfrac{6}{z-4}-\dfrac{2}{z-3}=1-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1-z/4}-2z^{-1}\dfrac{1}{1-3z^{-1}}$

$$=1-\dfrac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}z^{n}-2\sum_{n=-1}^{-\infty}3^{-n-1}z^{n}\qquad\qquad（3<|z|<4）$$

(ii) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1+6z^{-1}\dfrac{1}{1-4z^{-1}}-2z^{-1}\dfrac{1}{1-3z^{-1}}$

$$=1+\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\cdot4^{-n}-\dfrac{2}{3}\cdot3^{-n}\right)z^{n}\qquad\qquad（4<|z|<\infty）$$

（5）$\dfrac{1}{z+2}=z^{-1}\dfrac{1}{1+2/z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{n}z^{-n-1}$ （$|z|>2$），$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}z^{n}$ （$|z|<\infty$），两级数都

是绝对收敛的，所以可用 Cauchy 乘积计算 $\dfrac{e^{z}}{z+2}$。

$$\dfrac{e^{z}}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{z^{k}}{k!}\cdot(-2)^{n-k}z^{k-n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n-k}}{k!}z^{2k-n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2k}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n-k}}{k!}z^{2k-n-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{2k-1}\dfrac{(-2)^{n-k}}{k!}z^{2k-n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-1}^{-\infty}\dfrac{(-2)^{k-m-1}}{k!}z^{m}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k-1}\dfrac{(-2)^{k-m-1}}{k!}z^{m}$$

$$=\sum_{m=-1}^{-\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^{k-m-1}}{k!}z^{m}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\dfrac{(-2)^{k-m-1}}{k!}z^{m}\qquad（2<|z|<\infty）$$

（6）$\dfrac{1}{1-\cos z}=\dfrac{1}{1-\cos(z-2n\pi)}=\dfrac{1}{2\sin^{2}\left(\dfrac{z-2n\pi}{2}\right)}$，可看出 $z=2n\pi$ 是二阶极点，且它

是关于 $z-2n\pi$ 的偶函数，故可设 $\dfrac{1}{1-\cos z}=\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n}(z-2n\pi)^{2n}$。

$$1=(1-\cos z)\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n}(z-2n\pi)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}(z-2n\pi)^{2n}\cdot\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n}(z-2n\pi)^{2n}，\text{其中}b_{n}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}。$$

假设上式右边的 Cauchy 乘积收敛，则 $1=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-1}^{n-1}a_{k}b_{n-k}(z-2n\pi)^{2n}$。比较系数可得

$$1=a_{-1}b_{1}，\quad 0=a_{-1}b_{2}+a_{0}b_{1}，\quad 0=a_{-1}b_{3}+a_{0}b_{2}+a_{1}b_{1}，\quad 0=a_{-1}b_{4}+a_{0}b_{3}+a_{1}b_{2}+a_{2}b_{1}，\quad\cdots$$

解得 $a_{-1} = 2$ ， $a_0 = \dfrac{1}{6}$ ， $a_1 = \dfrac{1}{120}$ ， $a_2 = \dfrac{1}{3024}$ ， $\cdots$

即 $\dfrac{1}{1-\cos z} = 2(z - 2n\pi)^{-2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{120}(z - 2n\pi)^2 + \dfrac{1}{3024}(z - 2n\pi)^4 + \cdots$ （ $0 < |z - 2n\pi| < 2\pi$ ）

114．用级数相乘的方法求下列函数在 $z = 0$ 附近的级数展开：（1） $-\ln(1-z)\ln(1+z)$ ；

（2） $\ln(1+z^2)\arctan z$ ；（3） $\exp\dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{a^2}{z}\right)$ ；（4） $e^z \sin\dfrac{1}{z}$ 。

由于幂级数在 $|z| < R$ （ R 是收敛半径）内都是绝对收敛的，故可计算 Cauchy 乘积。

（1） $\ln(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ ， $\ln(1-z) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} z^n$ 。（ $|z| < 1$ ）

$-\ln(1-z)\ln(1+z) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{n-k+1}}{k(n-k)} z^n$

当 n 为奇数时， $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{n-k+1}}{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{k(n-k)}$ 。又有 $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{n-k+1}}{k(n-k)} = -\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^j}{j(n-j)}$ ，

（作变换 $n - k = j$ ）所以 $a_n = -a_n$ ，即 $a_n = 0$ 。令上面的级数表达式中 n 只取偶数，则

$-\ln(1-z)\ln(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n-1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k(2n-k)} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1}\left[\dfrac{(-1)^{k+1}}{k} + \dfrac{(-1)^{k+1}}{2n-k}\right] z^{2n}$

作变换 $2n - k = m$ ，则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2n-k} = \sum_{m=1}^{2n-1} \dfrac{(-1)^{m+1}}{m}$ ，所以

$-\ln(1-z)\ln(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} z^{2n}$ （ $|z| < 1$ ）

（2） $\ln(1+z^2)\arctan z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2k+1)(n-k)} z^{2n+1}$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{2}{2k+1} + \dfrac{1}{n-k}\right) z^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{2}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) z^{2n+1}$

$= 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}\right) z^{2n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} z^{2n+1}$ （ $|z| < 1$ ）

（3）

$$\exp\frac{1}{2}\left(z-\frac{a^2}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{2^n n!}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^{2k}}{2^n k!(n-k)!}z^{n-2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}}{2^n k!(n-k)!}z^{n-2k}$$

令 $n-2k=m$，则上式 $=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{-1}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m+\sum_{m=-1}^{-\infty}\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(a)\left(\frac{z}{a}\right)^m \qquad\qquad (\,0<|z|<\infty\,)$$

其中 $J_m(a)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{2k+m}, m=0,1,2,\cdots\\[4mm]\sum_{k=-m}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{2k+m}, m=-1,-2,\cdots\end{cases}$ 。

（4） $e^z\sin\dfrac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{-2n-1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-k)!}z^{n-3k-1}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-k)!}z^{n-3k-1}$$

令 $n-3k-1=m$，则上式 $=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-(2k+1)}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-(2k+1)}^{-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m$$

$$=\sum_{m=-1}^{-\infty}\sum_{k=\left[-\frac{n}{2}\right]}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m \quad(\,0<|z|<\infty\,)$$

115。将下列函数在 $z=0$ 点展开（其中的多值函数均取主值分枝）：

（1） $\sqrt{1+z^2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$；（2） $\sqrt{1-z^2}\sin^{-1}z$；（3） $(1+z)^{-n}\ln(1+z)$；（4） $\exp\left(\tan^{-1}z\right)$。

（1） 令 $f(z)=\sqrt{1+z^2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$，可得微分方程 $f'(z)-\dfrac{z}{1+z^2}f(z)=1$。

可看出方程在 $|z|<1$ 上有解析解，可设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，由于在 $|z|<1$ 上可逐项求导，所以

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}，\text{则} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = 1 + z^2，\text{即}$$

$$a_1 + (2a_2 - a_0)z + 3a_3 z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+1)a_{n+1} + (n-2)a_{n-1} \right] z^n = 1 + z^2$$

比较系数可得 $a_1 = 1$，$2a_2 - a_0 = 0$，$3a_3 = 1$，$a_k = -\dfrac{k-3}{k} a_{k-2}$（$k \geq 4$）。

又有 $a_0 = f(0) = 0$，所以 $a_2 = 0$，$a_3 = 1/3$，

$$a_{2k} = -\frac{2k-3}{2k} a_{2(k-1)} = (-1)^2 \frac{(2k-3)(2k-5)}{(2k)(2k-2)} a_{2(k-2)} = \cdots = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} a_2 = 0，$$

（$k = 2,3,4,\cdots$）

$$a_{2k+1} = -\frac{2k-2}{2k+1} a_{2(k-1)+1} = (-1)^2 \frac{(2k-2)(2k-4)}{(2k+1)(2k-1)} a_{2(k-2)+1} = \cdots = (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!}$$

（$k = 2,3,4,\cdots$）。

所以 $\sqrt{1+z^2} \ln\left(z + \sqrt{1+z^2} \right) = z + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!} z^{2k+1}$ （$|z| < 1$）

（2）可得微分方程 $f'(z) + \dfrac{z}{1-z^2} f(z) = 1$，在 $|z|<1$ 上设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则

$$a_1 + (2a_2 + a_0)z + 3a_3 z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)a_{n+2} - (n-1)a_n \right] z^{n+1} = 1 - z^2。\text{所以}$$

$$a_0 = f(0) = 0，\ a_1 = 1，\ a_2 = 0，\ a_3 = -1/3，\ a_{2k} = \frac{2k-3}{2k} a_{2k-2} = \cdots = \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} a_0 = 0$$

（$k = 2,3,4,\cdots$），$a_{2k+1} = \dfrac{2k-2}{2k+1} a_{2(k-1)+1} = \cdots = -\dfrac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!}$（$k = 2,3,4,\cdots$）。

所以 $\sqrt{1-z^2} \sin^{-1} z = z - \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!} z^{2n+1}$ （$|z| < 1$）

（3）令 $f(z) = (1+z)^{-n} \ln(1+z)$，则 $f^{(k)}(z) = \sum_{l=0}^{k} \dfrac{k!}{l!(k-l)!} \left[(1+z)^{-n} \right]^{(l)} \left[\ln(1+z) \right]^{(k-l)}$，

$$\left[(1+z)^{-n}\right]^{(l)}=\frac{(-1)^l(n+l-1)!}{(n-1)!(1+z)^{n+l}}, \quad \left[\ln(1+z)\right]^{(m)}=\left(\frac{1}{1+z}\right)^{(m-1)}=\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(1+z)^m} \quad (m \geq 1),$$

代入 $f^{(k)}(z)$ 的表达式得 $f^{(k)}(0)=\dfrac{(-1)^{k-1}k!}{(n-1)!}\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}\dfrac{(n+l-1)!}{l!(k-l)}$。

所以 $f(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(n+l-1)!}{l!(k-l)}z^k \qquad (|z|<1)$

（4）可得微分方程 $f'(z)-\dfrac{1}{1+z^2}f(z)=0$。在 $|z|<1$ 上设 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，则

$$a_1-a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}-a_n+(n-1)a_{n-1}\right]z^n=0。$$

$a_0=f(0)=1$，$a_1=a_0=1$，$a_n=\dfrac{1}{n}a_{n-1}-\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}$，$n=2,3,4,\cdots$

若令 $a_n=\dfrac{b_n}{n!}$，则有 $b_0=1$，$b_1=1$，$b_n=b_{n-1}-(n-1)(n-2)b_{n-2}$，$n=2,3,4,\cdots$。

116. 证明：如果级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在区域 G 的边界 C 上一致收敛，$u_k(z)$（$k=1,2,\cdots$）在 $\bar{G}$ 中解析，则此级数在 $\bar{G}$ 中一致收敛。

证：因为级数在 C 上一致收敛，故对任意 $\varepsilon>0$，n 充分大时对任意整数 p 及任意 $z \in C$ 有 $\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$。由最大模原理，该不等式对于任意 $z \in \bar{G}$ 都成立，即此级数在 $\bar{G}$ 中一致收敛。

117. 利用 Abel 第二定理证明：如果 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}u_k$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}v_k$ 与 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}w_k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}u_l v_{k-l}$ 分别收敛于 A, B 和 C，则 $C=AB$。

证：令 $U(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}u_k x^k$，$V(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}v_k x^k$，$W(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}w_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}u_l v_{k-l}x^k$。

由于 $U(x)$，$V(x)$ 在 $x=1$ 点收敛，所以 $U(x)$，$V(x)$ 在区间 $|x|<1$ 上绝对收敛（阿贝尔第一定理），因此可用 Cauchy 乘积计算 $U(x)\cdot V(x)$，即

$$U(x) \cdot V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} u_l x^l \cdot v_{k-l} x^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k x^k = W(x)$$

由于 $U(x)$，$V(x)$ 和 $W(x)$ 都在 $x=1$ 点收敛，所以他们都在 $x=1$ 点左连续（阿贝尔第二定理），即 $\lim\limits_{x \to 1-0} U(x) \cdot V(x) = U(1) \cdot V(1) = \lim\limits_{x \to 1-0} W(x) = W(1)$，也就是 $C = AB$。

118. 定义 $\sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$，$\cos z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$，（$|z| < \infty$）

试利用级数乘法证明 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$。

证：右边 $= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} a^{2k+1} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} b^{2k} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} a^{2k} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} b^{2k+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a^{2k+1} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!} b^{2n-2k} + \frac{(-1)^k}{(2k)!} a^{2k} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!} b^{2n-2k+1} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2k+1)!(2n+1-2k-1)!} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1} + \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2k)!(2n+1-2k)!} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a+b)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(a+b) = 左边$$

119. 计算积分 $\oint_{\gamma} \left(\sum\limits_{n=-2}^{\infty} z^n \right) dz$，其中 γ 是单位圆内任一不经过原点的简单闭合曲线。

$$\oint_{\gamma} \left(\sum_{n=-2}^{\infty} z^n \right) dz = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2} + \oint_{\gamma} \frac{dz}{z} + \oint_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz$$

由于在单位圆内，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$，这是解析函数，故有 $\oint_{\gamma} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = 0$。

若 γ 包围原点，则 $\oint_{\gamma} \dfrac{dz}{z} = 2\pi i$，$\oint_{\gamma} \dfrac{dz}{z^2} = 0$，所以 $\oint_{\gamma} \left(\sum\limits_{n=-2}^{\infty} z^n \right) dz = 2\pi i$；

若 γ 不包围原点，则 $\oint_\gamma \dfrac{dz}{z} = 0$，$\oint_\gamma \dfrac{dz}{z^2} = 0$，所以 $\oint_\gamma \left(\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty} z^n \right) dz = 0$。

附：

Abel 第一定理：若幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛，则它在圆 $|z| < |z_0|$ 内绝对收敛，并且在任意闭圆 $|z| < k|z_0|$（$0 < k < 1$）内一致收敛。

Abel 第二定理：若**复幂级数** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R，且在 $z = R$ 处收敛，则（1）该级数级数在以 $z = R$ 为顶点，以$[0，R]$为角平分线，开度为 $2\theta_0$（$< \pi$）的四边形角域 A（下图所示）上一致收敛；（2）$\displaystyle\lim_{z \in A, z \to R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$。
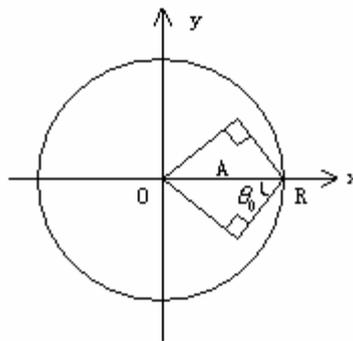
若**实幂级数** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，并且它在 $x = R$ 处收敛，则该级数在闭区间$[0，R]$上一致收敛，且在 $x = R$ 处左连续。

120. 判断下列函数奇点的性质，如果是极点，确定其阶数：（1）$\dfrac{1}{z^2+a^2}$ ；（2）$\dfrac{\cos az}{z^2}$ ；

（3）$\dfrac{\cos az - \cos bz}{z^2}$ ；（4）$\dfrac{\sin z}{z^2}-\dfrac{1}{z}$ ；（5）$\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$ ；（6）$\sin\dfrac{1}{z}$ ；（7）$\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$ ；

（8）$\displaystyle\int_0^z \dfrac{e^{\sqrt{\zeta}}-e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}}d\zeta$ 。

（1）$\pm ai$ 是一阶极点。$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{t^2}{1+a^2t^2}$ ，0 不是 $f(1/t)$ 的奇点，故 ∞ 不是 $f(z)$ 的奇点。

（2）0 是二阶极点；$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=t^2\left[1-\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{a}{t}\right)^2+\dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{a}{t}\right)^4-+\cdots\right]=t^2-\dfrac{a^2}{2!}+\dfrac{a^4}{4!}t^{-2}-+\cdots$

0 是 $f(1/t)$ 的本性奇点，所以 ∞ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

（3）$f(z)=z^{-2}\left[\left(1-\dfrac{1}{2!}a^2z^2+\dfrac{1}{4!}a^4z^4-+\cdots\right)-\left(1-\dfrac{1}{2!}b^2z^2+\dfrac{1}{4!}b^4z^4-+\cdots\right)\right]$

$\qquad\qquad =-\dfrac{1}{2!}\left(a^2-b^2\right)+\dfrac{1}{4!}\left(a^4-b^4\right)z^2-+\cdots$

所以 0 是 $f(z)$ 的可去奇点。$f(1/t)=-\dfrac{1}{2!}\left(a^2-b^2\right)+\dfrac{1}{4!}\left(a^4-b^4\right)t^{-2}+\cdots$，$\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

（4）$f(z)=z^{-2}\left(z-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5-+\cdots\right)-z^{-1}=-\dfrac{1}{3!}z+\dfrac{1}{5!}z^3-+\cdots$，0 是可去奇点。

$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=-\dfrac{1}{3!}t^{-1}+\dfrac{1}{5!}t^{-3}-+\cdots$，$\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

（5）$\displaystyle\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\dfrac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}=\lim_{z\to0}\dfrac{z+1-\left(1+z+z^2/2+\cdots\right)}{z^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 0 是可去奇点。

$\displaystyle\lim_{z\to2n\pi i}(z-2n\pi i)f(z)=\lim_{z\to2n\pi i}\dfrac{(z-2n\pi i)(z-e^z+1)}{z(e^z-1)}=\lim_{z\to2n\pi i}\dfrac{z-e^z+1+(z-2n\pi i)(1-e^z)}{e^z-1+ze^z}=1$

所以 $2n\pi i$（$n=\pm1,\pm2,\cdots$）是一阶奇点。由于 $2n\pi i\to\infty$，所以在 ∞ 点的任一邻域内有无穷个奇点，即 ∞ 是非孤立奇点。

（6）$f(z)=z^{-1}-\dfrac{1}{3!}z^{-3}+\dfrac{1}{5!}z^{-5}-+\cdots$，所以 0 是本性奇点。

$f(1/t)=t-\dfrac{1}{3!}t^3+\dfrac{1}{5!}t^5-+\cdots$，所以 ∞ 点是可去奇点。

（7）$\displaystyle\lim_{z\to0}f(z)=1$，所以 0 是可去奇点。

$$\lim_{z \to n^2\pi^2} \left(z - n^2\pi^2\right) f(z) = \lim_{z \to n^2\pi^2} \frac{\left(z - n^2\pi^2\right)\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}} = \lim_{z \to n^2\pi^2} \frac{\sqrt{z} + \dfrac{\left(z - n^2\pi^2\right)}{2\sqrt{z}}}{\dfrac{\cos\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}} = (-1)^n 2n^2\pi^2$$

所以 $n^2\pi^2$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）是一阶极点。由于 $n^2\pi^2 \to \infty$，所以 ∞ 点的任意邻域包含无穷个奇点，即 ∞ 点为非孤立奇点。

（8） $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{e^{\sqrt{\zeta}} - e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta = \int_0^z \zeta^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n/2}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^{n/2}}{n!} \right) d\zeta$

$$= 2\int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{(2k+1)!} d\zeta = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{k+1}}{(k+1)(2k+1)!}$$

$f(1/t) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{-(k+1)}}{(k+1)(2k+1)!}$，即 ∞ 点为本性奇点。

$f(z) = 2\displaystyle\int_0^z \left(e^{\sqrt{\zeta}} - e^{-\sqrt{\zeta}} \right) d\sqrt{\zeta} = 2\left(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}} - 2 \right)$，即除 ∞ 点外无其他奇点。

121. 求下列函数在指定点 z_0 的留数：（1） $\dfrac{e^{z^2}}{z-1}$，$z_0 = 1$；（2） $\dfrac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$，$z_0 = 1$；

（3） $\left(\dfrac{z}{1-\cos z}\right)^2$，$z_0 = 0$；（4） $\dfrac{z^2}{z^4-1}$，$z_0 = i$；（5） $\dfrac{1}{z^2 \sin z}$，$z_0 = 0$；（6） $\dfrac{1+e^z}{z^4}$，$z_0 = 0$；

（7） $\dfrac{e^z}{(z^2-1)^2}$，$z_0 = 1$；（8） $\dfrac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{z}}$，$z_0 = -\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)^2$，$n = 0, 1, 2, \cdots$。

（1） $\operatorname{res} f(1) = \lim\limits_{z \to 1} (z-1) f(z) = e$。

（2） $\operatorname{res} f(1) = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{d}{dz} \left[(z-1)^2 f(z) \right] = 2e$。

（3） $1 - \cos z = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2!} z^2 + \dfrac{1}{4!} z^4 - \dfrac{1}{6!} z^6 + -\cdots \right) = \dfrac{1}{2} z^2 \left(1 - \dfrac{1}{12} z^2 + \dfrac{1}{360} z^4 - +\cdots \right)$，

$\left(\dfrac{z}{1-\cos z}\right)^2 = 4z^{-2} \left(1 - \dfrac{1}{12} z^2 + \dfrac{1}{360} z^4 - +\cdots \right)^{-2} = 4z^{-2} \left[1 + 2\left(\dfrac{1}{12} z^2 - \dfrac{1}{360} z^4 + \cdots \right) + O(z^4) \right]$

$$= 4z^{-2} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{45} z^2 + \cdots$$

所以 $\operatorname{res} f(0) = 0$。

（4）$f(z)=\dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)}$，$i$ 是一阶极点。$\operatorname{res} f(i)=\lim\limits_{z\to i}(z-i)f(z)=-\dfrac{1}{4}i$。

（5）显然 0 是三阶极点。$\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d^2}{dz^2}z^3 f(z)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z(1+\cos^2 z)-\sin 2z}{\sin^3 z}$

$$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{3\sin^2 z-2z\sin z\cos z}{3\sin^2 z\cos z}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos z}-\dfrac{2z}{3\sin z}\right)=\dfrac{1}{6}$$

（6）$\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{3!}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d^3}{dz^3}z^4 f(z)=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{z\to 0}e^z=\dfrac{1}{6}$。

（7）$\operatorname{res} f(1)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{d}{dz}(z-1)^2 f(z)=0$。

（8）$\operatorname{res} f\left[-\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)^2\right]=\lim\limits_{z\to-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2}\left[z+\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)^2\right]f(z)$

$$=\lim\limits_{z\to-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2}\dfrac{2\left[z+\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)^2\right]}{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}=\lim\limits_{z\to-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2}\dfrac{4\sqrt{z}}{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}=(-1)^n(2n+1)\pi$$

122．求下列函数在奇点处的留数：（1）$\dfrac{1}{z^3-z^5}$；（2）$\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^{m+1}}$；（3）$\dfrac{z}{1-\cos z}$；

（4）$\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{sh}\sqrt{z}}$；（5）$e^{\frac{1}{1-z}}$；（6）$\cos\sqrt{\dfrac{1}{z}}$；（7）$\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$；

（8）$\dfrac{1}{z}\left[1+\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(z+1)^n}\right]$。

（1）$f(z)=\dfrac{1}{z^3(z+1)(z-1)}$，0 是三阶极点，$\pm 1$ 是一阶极点。$f(1/t)=\dfrac{t^5}{t^2-1}$，$\infty$ 点

是可去奇点。$\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d^2}{dz^2}z^3 f(z)=1$，$\operatorname{res} f(1)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z)=\dfrac{1}{2}$，

$\operatorname{res} f(-1)=\lim\limits_{z\to-1}(z+1)f(z)=\dfrac{1}{2}$。

（2）$\pm i$ 是 $m+1$ 阶极点，∞ 点是可去奇点。

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{1}{m!} \lim_{z \to i} \frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{(z+i)^{m+1}} = \frac{1}{m!} \lim_{z \to i} \frac{(-1)^m (m+1)(m+2)\cdots(2m)}{(z+i)^{2m+1}}$$

$$= \frac{1}{(m!)^2} \frac{(-1)^m (2m)!}{(2i)^{2m+1}} = -i \frac{(2m)!}{(m!)^2 \, 2^{2m+1}}$$

$$\operatorname{res} f(-i) = i \frac{(2m)!}{(m!)^2 \, 2^{2m+1}}$$

（3）可看出 0 是一阶极点，$2n\pi$（$n = \pm 1, \pm 2, \cdots$）是二阶极点，∞ 点是非孤立奇点。

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{1-\cos z} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = 2 \, .$$

$$1-\cos z = 1-\cos(z-2n\pi) = \frac{1}{2}(z-2n\pi)^2 \left[1 - \frac{1}{12}(z-2n\pi)^2 + \frac{1}{360}(z-2n\pi)^4 - + \cdots \right]$$

$$\frac{z}{1-\cos z} = (z-2n\pi)\left[1-\cos(z-2n\pi) \right]^{-1} + 2n\pi \left[1-\cos(z-2n\pi) \right]^{-1}$$

$$= 2(z-2n\pi)^{-1} \left[1 + \frac{1}{12}(z-2n\pi)^2 + O(z-2n\pi)^4 \right]$$

$$+ 4n\pi (z-2n\pi)^{-2} \left[1 + \frac{1}{12}(z-2n\pi)^2 + O(z-2n\pi)^4 \right]$$

$$= 4n\pi (z-2n\pi)^{-2} + 2(z-2n\pi)^{-1} + \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{6}(z-2n\pi) + \cdots$$

即 $\operatorname{res} f(2n\pi) = 2$。

（4）$f(z) = \dfrac{2\sqrt{z}}{e^{\sqrt{z}} - e^{-\sqrt{z}}}$，奇点是 $-k^2\pi^2$（$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$），$\infty$ 点是非孤立奇点。

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{2}{e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}} = 1 \, , \text{ 所以 0 是可去奇点，} \operatorname{res} f(0) = 0 \, . \ k \neq 0 \text{ 时,}$$

$$\operatorname{res} f(-k^2\pi^2) = \lim_{z \to -k^2\pi^2} \frac{2(z+k^2\pi^2)\sqrt{z}}{e^{\sqrt{z}} - e^{-\sqrt{z}}} = \lim_{z \to -k^2\pi^2} \frac{4z + 2(z+k^2\pi^2)}{e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}} = (-1)^{k+1} 2k^2\pi^2 \, .$$

（5）$f(z) = 1 + \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^2 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^3 + \cdots = 1 - (z-1)^{-1} + \dfrac{1}{2}(z-1)^{-2} - \dfrac{1}{3!}(z-1)^{-3} + - \cdots$

即 $\operatorname{res} f(1) = -1$。由于 $f(z)$ 只有两个孤立奇点 $1, \infty$，所以 $\operatorname{res} f(\infty) = -\operatorname{res} f(1) = 1$。

（6）$f(z)=1-\dfrac{1}{2!}\left(\sqrt{\dfrac{1}{z}}\right)^2+\dfrac{1}{4!}\left(\sqrt{\dfrac{1}{z}}\right)^4-+\cdots=1-\dfrac{1}{2}z^{-1}+\dfrac{1}{24}z^{-2}-+\cdots$

即 $\operatorname{res} f(0)=-\dfrac{1}{2}$。 $\operatorname{res} f(\infty)=-\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{2}$。

（7）若规定 $\ln z\big|_{z=1}=0$ ，则 1 是二阶极点。此时

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to1}\dfrac{d}{dz}(z-1)^2 f(z)=\lim_{z\to1}\dfrac{z\ln z-z+1}{z(\ln z)^2}=\lim_{z\to1}\dfrac{1}{\ln z+2}=\dfrac{1}{2}$$

若规定 $\ln z\big|_{z=1}=2k\pi i$ （ $k=\pm1,\pm2,\cdots$ ），则 1 是一阶极点。此时

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\dfrac{1}{\ln z}=\dfrac{1}{2k\pi i}$$

（8） $\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to0}zf(z)=n+1$。

$$\operatorname{res} f(-1)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big[(z+1)^n f(z)\Big]$$

$$=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\dfrac{1}{z}\Big[(z+1)^n+(z+1)^{n-1}+\cdots+(z+1)+1\Big]\right\}$$

$$=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\dfrac{1}{z}\big(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+n+1\big)\right]$$

$$=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^{n-1}+a_{n-1}z^{n-2}+\cdots+a_1+\dfrac{n+1}{z}\right)$$

$$=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\left[(n-1)!+0+\cdots+0+(n+1)\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}\right]$$

$$=-n$$

$\operatorname{res} f(\infty)=-\operatorname{res} f(0)-\operatorname{res} f(-1)=-1$。

123．指出下列函数在 ∞ 点的性质，并求其留数：（1） $\dfrac{1}{z}$ ；（2） $\dfrac{\cos z}{z}$ ；（3） $\dfrac{z}{\cos z}$ ；

（4） $\dfrac{z^2+1}{e^z}$ ；（5） $e^{-\frac{1}{z^2}}$ ；（6） $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ 。

（1） $f(1/t)=t$ ，所以 ∞ 是可去奇点。 ∞ 点的留数等于 $-f(1/t)$ 在 $t=0$ 点邻域内幂级数

展开中 t 的系数，即 $\operatorname{res} f(\infty)=-1$。

（2）$f\left(1/t\right)=t\cos\dfrac{1}{t}=t\left(1-\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{4!}\dfrac{1}{t^4}+\cdots\right)=t-\dfrac{1}{2}t^{-1}+\dfrac{1}{24}t^{-3}-+\cdots,$

即 ∞ 是本性奇点，$\operatorname{res}f\left(\infty\right)=-1$。

（3）易知 $z=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ 是奇点，由于 $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\to\infty$，所以 ∞ 是非孤立奇点。

（4）$f\left(1/t\right)=\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)e^{-t^{-1}}=t^{-2}\left(1-t^{-1}+\dfrac{1}{2}t^{-2}-+\cdots\right)+\left(1-t^{-1}+\dfrac{1}{2}t^{-2}-+\cdots\right)$

$$=1-t^{-1}+\dfrac{3}{2}t^{-2}+\cdots$$

即 ∞ 是本性奇点，$\operatorname{res}f\left(\infty\right)=0$。

（5）$f\left(1/t\right)=e^{-t^2}$，$\infty$ 点为可去奇点，$\operatorname{res}f\left(\infty\right)=0$。

（6）$f\left(1/t\right)=\dfrac{\sqrt{\left(1-t\right)\left(1-2t\right)}}{t}$，$0$ 为 $f\left(1/t\right)$ 的一阶极点，故 ∞ 点为 $f\left(z\right)$ 的一阶极点。

1 和 $1/2$ 是 $f\left(1/t\right)$ 的分枝点。规定 $\arg\left(1-t\right)_{t=0}=2n\pi,\arg\left(1/2-t\right)_{t=0}=2m\pi$，则

$$\left(\sqrt{1-t}\right)_{t=0}^{(k)}=(-1)^k\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{2}-k+1\right)\dfrac{\sqrt{1-t}}{\left(1-t\right)^k}\bigg|_{t=0}=(-1)^n(-1)^k\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{2}-k+1\right)$$

$$\left(\sqrt{1-2t}\right)_{t=0}^{(k)}=(-2)^k\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{2}-k+1\right)\dfrac{\sqrt{1-2t}}{\left(1-2t\right)^k}\bigg|_{t=0}=(-1)^m(-2)^k\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{2}-k+1\right)$$

$$f\left(1/t\right)=(-1)^{n+m}t^{-1}\left(1-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}t^2-\dfrac{1}{16}t^3+\cdots\right)\left(1-t-\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}t^3+\cdots\right)$$

$$=(-1)^{n+m}\left(t^{-1}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{8}t-\dfrac{7}{16}t^2+\cdots\right)$$

即 $\operatorname{res}f\left(\infty\right)=(-1)^{n+m}\dfrac{1}{8}$。

124. 设 $f\left(z\right)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内展开为 $f\left(z\right)=C_0+\dfrac{C_1}{z}+\dfrac{C_2}{z^2}+\cdots$，试求 $f^2\left(z\right)$ 在 $z=\infty$ 处的留数。

$$f\left(z\right)=C_0\left(1+\dfrac{C_1}{C_0}z^{-1}+\dfrac{C_2}{C_0}z^{-2}+\cdots\right)$$

$$f^2(z) = C_0^2 \left[1 + \left(\frac{C_1}{C_0} z^{-1} + \frac{C_2}{C_0} z^{-2} + \cdots \right) \right]^2 = C_0^2 \left[1 + 2 \left(\frac{C_1}{C_0} z^{-1} + \frac{C_2}{C_0} z^{-2} + \cdots \right) + O(z^{-2}) \right]$$

$$= C_0^2 + 2 C_0 C_1 z^{-1} + O(z^{-2})$$

$f(z)$ 在 ∞ 点的留数等于 $-f(z)$ 在 $z = \infty$ 点邻域内幂级数展开中 z^{-1} 的系数，即 $-2C_0 C_1$。

125. 证明：若除有限个奇点外，$f(z)$ 在扩充 z 平面上解析，则函数 $f(z)$ 的留数和为 0。

证：设 z_k（$k = 1, 2, \cdots n$）是 $f(z)$ 的有限奇点，C_k 是包围 z_k 的逆时针闭曲线（不包围其它奇点），C 为顺时针包围所有有限奇点的闭曲线。

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z) dz = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$

所以 $\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) = 0$。

126. $f(z)$ 为偶函数，$z = 0$ 是他的孤立奇点，证明 $\operatorname{res} f(0) = 0$。

因为 $f(z)$ 为偶函数，所以 $f(z)$ 在 $z = 0$ 附近的幂级数展开式中无奇数项，当然也没有 z^{-1} 项，因此 $\operatorname{res} f(0) = 0$。

127. $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别以 $z = 0$ 为其 m 阶和 n 阶零点，问下列函数在 $z = 0$ 处的性质如何？

（1）$f(z) + g(z)$；（2）$f(z) \cdot g(z)$；（3）$\dfrac{f(z)}{g(z)}$；（4）$f[g(z)]$。

设 $f(z) = z^m \varphi(z)$，$g(z) = z^n \Psi(z)$。其中 $\varphi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 都在 $z = 0$ 的某邻域内解析，且 $\varphi(0) \neq 0$，$\Psi(0) \neq 0$。

（1）设 $m < n$，则 $f(z) + g(z) = z^m \left[\varphi(z) + z^{n-m} \Psi(z) \right]$，由于 $\varphi(z) + z^{n-m} \Psi(z)$ 是不以 $z = 0$ 为零点，在 $z = 0$ 的某邻域内的解析函数，所以 $z = 0$ 是 $f(z) + g(z)$ 的 m 阶零点。

当 $m \neq n$ 时，$z = 0$ 是 $f(z) + g(z)$ 的 $\min\{m, n\}$ 阶零点。

若 $m=n$ ，则 $f(z)+g(z)=z^m\left[\varphi(z)+\Psi(z)\right]$ ，$z=0$ 有可能是 $\varphi(z)+\Psi(z)$ 的零点，所以 $z=0$ 是 $f(z)+g(z)$ 的 k 阶零点（ $k\ge m=n$ ）。

（2） $f(z)\cdot g(z)=z^{m+n}\varphi(z)\cdot\Psi(z)$ ，所以 $z=0$ 是 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点。

（3）若 $m>n$ ，则 $\dfrac{f(z)}{g(z)}=z^{m-n}\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$ ，由于 0 不是 $\Psi(z)$ 的零点，所以 $\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$ 在 $z=0$ 的

某邻域内解析，即 $z=0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点。

若 $m<n$ ，则 $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{1}{z^{n-m}}\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$ ，即 $z=0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点。

若 $m=n$ ，则 $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$ ，$z=0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点。

（4） $f\left[g(z)\right]=z^{mn}\Psi^m(z)\varphi\left[z^n\Psi(z)\right]$ ，$z=0$ 不是 $\Psi^m(z)\varphi\left[z^n\Psi(z)\right]$ 的零点，且他在

$z=0$ 的某邻域内解析，所以 $z=0$ 是 $f\left[g(z)\right]$ 的 mn 阶零点。

128. $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别以 $z=0$ 为其 m 阶和 n 阶极点，问下列函数在 $z=0$ 处的性质如何？

（1） $f(z)+g(z)$ ；（2） $f(z)\cdot g(z)$ ；（3） $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ ；（4） $f\left[\dfrac{1}{g(z)}\right]$ 。

设 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{z^m}$ ， $g(z)=\dfrac{\Psi(z)}{z^n}$ 。其中 $\varphi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 都在 $z=0$ 的某邻域内解析，且

$\varphi(0)\ne 0$ ， $\Psi(0)\ne 0$ 。

（1）若 $m<n$ ，则 $f(z)+g(z)=\dfrac{z^{n-m}\varphi(z)+\Psi(z)}{z^n}$ ， $z^{n-m}\varphi(z)+\Psi(z)$ 是不以 $z=0$ 为

零点，在 $z=0$ 的某邻域内的解析函数，所以 $z=0$ 是 $f(z)+g(z)$ 的 n 阶极点。

若 $m\ne n$ ， $z=0$ 是 $f(z)+g(z)$ 的 $\max\{m,n\}$ 阶极点。

若 $m=n$ ， $f(z)+g(z)=\dfrac{\varphi(z)+\Psi(z)}{z^n}$ ，$z=0$ 有可能是 $\varphi(z)+\Psi(z)$ 的零点，所以 $z=0$

是 $f(z)+g(z)$ 的 k 阶极点（$k \le m = n$）。

（2） $f(z) \cdot g(z) = \dfrac{\varphi(z)\Psi(z)}{z^{m+n}}$， $z = 0$ 是 $f(z) \cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点。

（3）若 $m < n$， $\dfrac{f(z)}{g(z)} = z^{n-m}\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$， $z = 0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶零点；

若 $m > n$， $\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{1}{z^{m-n}}\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$， $z = 0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点；

若 $m = n$， $\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$， $z = 0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点。

（4） $f\left[\dfrac{1}{g(z)}\right] = \dfrac{1}{z^{mn}}\varphi\left[\dfrac{z^{n}}{\Psi(z)}\right]\Psi^{m}(z)$， $z = 0$ 是 $f\left[\dfrac{1}{g(z)}\right]$ 的 mn 阶极点。

129. 讨论 $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{d}{dz}\ln f(z)$ 在 $z = a$ 点的性质，若 a 点是 $f(z)$ 的：（1）m 阶零点；（2）m 阶极点。如果 $z = a$ 是 $F(z)$ 的孤立奇点的话，则求出函数 $F(z)$ 在该点的留数。

（1）设 $f(z) = (z-a)^{m}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $z = a$ 的某邻域内解析，且 $\varphi(a) \neq 0$。

$$F(z) = \dfrac{d}{dz}\big[m\ln(z-a)+\ln\varphi(z)\big] = \dfrac{1}{z-a}\left[m+(z-a)\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]。$$

由于 $z = a$ 不是 $\varphi(z)$ 的零点，所以 $m+(z-a)\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 $z = a$ 的某邻域内解析，且 $z = a$ 不是它的零点，所以 $z = a$ 是 $F(z)$ 的一阶极点，$\operatorname{res}F(a) = \lim\limits_{z \to a}(z-a)F(z) = m$。

（2）设 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^{m}}$，则 $F(z) = \dfrac{1}{z-a}\left[-m+(z-a)\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]$， $z = a$ 是 $F(z)$ 的一阶极点，$\operatorname{res}F(a) = \lim\limits_{z \to a}(z-a)F(z) = -m$。

130. 设 $\varphi(z)$ 在 $z = a$ 点解析，且 $\varphi(a) \neq 0$。若（1）a 是 $f(z)$ 的 n 阶零点，（2）a 是 $f(z)$

的 n 阶极点，试求函数 $F(z) = \varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $z = a$ 点的留数。

（1）由上题结论，$z = a$ 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点，留数为 n。因为 $\varphi(z)$ 在 $z = a$ 点解析，且

$\varphi(a) \neq 0$，所以 $z = a$ 是 $F(z)$ 的一阶极点，

$$\operatorname{res} F(a) = \lim_{z \to a}(z-a)\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \to a}\varphi(z) \cdot \lim_{z \to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} = n\varphi(a)。$$

（2）$\operatorname{res} F(a) = -n\varphi(a)$。

131．设 C 是区域 G 内的任意一条简单闭曲线，a 为 C 包围区域内一点。若函数 $f(z)$ 在 G

内解析，且 $f(a) = 0$，$f'(a) \neq 0$，此外，$f(z)$ 在 $\bar{G}$ 中无其它零点。试证：

$$a = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz。$$

证：可知 a 为 $f(z)$ 的一阶零点。若 $a \neq 0$，由上题结论，$\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ 在 $z = a$ 点留数为 a，因

为 $f(z)$ 在 $\bar{G}$ 中无其它零点，则 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ 无其他奇点，所以 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{zf'(z)}{f(z)}dz = a$，

若 $a = 0$，则 $z = a = 0$ 是 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ 的可去奇点，即 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ 在 C 包围区域内解析，故有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = 0 = a。$$

132．若 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶零点，试求下列函数在 $z = 0$ 处的留数：（1）$\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$；

（2）$\dfrac{f''(z)}{f(z)}$。

设 $f(z) = z^n\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $z = 0$ 的某邻域内解析，且 $\varphi(0) \neq 0$。

（1）$F(z) = \dfrac{f''(z)}{f'(z)} = \dfrac{n(n-1)z^{n-2}\varphi(z) + 2nz^{n-1}\varphi'(z) + z^n\varphi''(z)}{nz^{n-1}\varphi(z) + z^n\varphi'(z)}$

$$= \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{n(n-1)\varphi(z) + 2nz\varphi'(z) + z^2\varphi''(z)}{n\varphi(z) + z\varphi'(z)}$$

可判断 $z = 0$ 是其一阶极点，有 $\operatorname{res} F(0) = \lim\limits_{z \to 0} zF(z) = n-1$。

（2）$F(z) = \dfrac{f''(z)}{f(z)} = \dfrac{n(n-1)z^{n-2}\varphi(z) + 2nz^{n-1}\varphi'(z) + z^n\varphi''(z)}{z^n\varphi(z)}$

$$= \dfrac{1}{z^2}\dfrac{n(n-1)\varphi(z) + 2nz\varphi'(z) + z^2\varphi''(z)}{\varphi(z)}$$

$z = 0$ 是其二阶极点。$\operatorname{res} F(0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{d}{dz}\left[z^2 F(z)\right] = 2n\dfrac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}$。

可设 $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$，则 $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n+1} + a_2 z^{n+2} + \cdots$

$\varphi(0) = a_0 = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，$\varphi'(0) = a_1 = \dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$，$\operatorname{res} F(0) = \dfrac{2n}{n+1}\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}$。

133．求下列各种条件下函数 $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ 在奇点 z_0 处的留数：

（1）z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，是 $g(z)$ 的 $m+1$ 阶零点；

（2）z_0 是 $g(z)$ 的二阶零点，但 $f(z_0) \neq 0$；

（3）z_0 是 $f(z)$ 的一阶零点，是 $g(z)$ 的三阶零点；

（4）z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，是 $g(z)$ 的一阶零点；

（1）设 $f(z) = a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots$，其中 $a_0 = \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}, a_1 = \dfrac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}, \cdots$

$g(z) = b_0(z-z_0)^{m+1} + b_1(z-z_0)^{m+2} + \cdots$，其中 $b_0 = \dfrac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}, b_1 = \dfrac{g^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}, \cdots$

$\operatorname{res} F(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)F(z) = \lim\limits_{z \to z_0}\dfrac{a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots}{b_0(z-z_0)^m + b_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots}$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots}{b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots} = \frac{a_0}{b_0} = (m+1)\frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)}(z_0)} \text{。}$$

（2）设 $g(z) = (z - z_0)^2 \Psi(z)$，则 $\Psi(z_0) = \frac{1}{2} g''(z_0)$，$\Psi'(z_0) = \frac{1}{6} g'''(z_0)$。

$$\operatorname{res} F(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)^2 F(z)\right] = \frac{f'(z_0)}{\Psi(z_0)} - \frac{f(z_0)\Psi'(z_0)}{\Psi^2(z_0)} = 2\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{f(z_0)g'''(z_0)}{\left[g''(z_0)\right]^2} \text{。}$$

（3）设 $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$，则 $\varphi(z_0) = f'(z_0)$，$\varphi'(z_0) = \frac{1}{2} f''(z_0)$。

$g(z) = (z - z_0)^3 \Psi(z)$，则 $\Psi(z_0) = \frac{1}{6} g'''(z_0)$，$\Psi'(z_0) = \frac{1}{24} g^{(4)}(z_0)$。

$$\operatorname{res} F(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)^2 F(z)\right] = \frac{\varphi'(z_0)}{\Psi(z_0)} - \frac{\varphi(z_0)\Psi'(z_0)}{\Psi^2(z_0)} = 3\frac{f''(z_0)}{g'''(z_0)} - \frac{3}{2}\frac{f'(z_0)g^{(4)}(z_0)}{\left[g'''(z_0)\right]^2} \text{。}$$

（4）设 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$，则 $\varphi(z_0) = \lim_{z \to z_0}\left[(z - z_0)f(z)\right]$，$\varphi'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)f(z)\right]$。

$g(z) = (z - z_0)\Psi(z)$，则 $\Psi(z_0) = g'(z_0)$，$\Psi'(z_0) = \frac{1}{2} g''(z_0)$。

$$\operatorname{res} F(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)^2 F(z)\right] = \frac{\varphi'(z_0)}{\Psi(z_0)} - \frac{\varphi(z_0)\Psi'(z_0)}{\Psi^2(z_0)} = \frac{\varphi'(z_0)}{g'(z_0)} - \frac{1}{2}\frac{\varphi(z_0)g''(z_0)}{\left[g'(z_0)\right]^2} \text{。}$$

134．若函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 中解析，$g(z)$ 在 G 内有有限个一阶零点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，而 $g(0) \neq 0$，试计算积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{zg(z)}dz$，其中 C 是 G 的边界，且 $z = 0$ 在 G 内。

令 $F(z) = \frac{f(z)}{zg(z)}$，则 $\operatorname{res} F(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(0)}{g(0)}$，

$$\operatorname{res} F(a_k) = \lim_{z \to 0} \frac{(z - a_k)f(z)}{zg(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z\dfrac{g(z) - g(a_k)}{(z - a_k)}} = \frac{f(a_k)}{a_k g'(a_k)}, \quad (k = 1, 2, \cdots n)$$

所以 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{zg(z)}dz = \dfrac{f(0)}{g(0)} + \dfrac{f(a_1)}{a_1 g'(a_1)} + \dfrac{f(a_2)}{a_2 g'(a_2)} + \cdots + \dfrac{f(a_n)}{a_n g'(a_n)}$ 。

135．计算下列积分值：

（1）$\oint_C \dfrac{dz}{1+z^4}$，$C$ 为 $|z-1|=2$ 或 $|z-1|=1$；

（2）$\oint_C \dfrac{\sin\dfrac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$，$C$ 为：(i) $|z|=\dfrac{1}{2}$，(ii) $|z-1|=1$，(iii) $|z|=3$；

（3）$\oint_{|z|=R}\dfrac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}dz$，$n<R^3<n+1$，$n$ 为正整数；

（4）$\oint_{|z|=n}\tan\pi z\,dz$，$n$ 为正整数；

（5）$\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z^3\left(z^{10}-2\right)}dz$；（6）$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^3}dz$；（7）$\oint_{|z|=2}e^{\frac{1}{z^2}}dz$；

（8）$\oint_{|z|=R}\dfrac{e^z}{\operatorname{sh}mz}dz$，$\dfrac{n}{m}\pi<R<\dfrac{n+1}{m}\pi$，$m,n$ 均为正整数。

（1）被积函数有四个一阶极点：$e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$，$e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$。

$$\operatorname{res}f\left(e^{i\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\left(z-e^{i\pi/4}\right)f(z)=-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(1+i),$$

$$\operatorname{res}f\left(e^{-i\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{-i\pi/4}}\left(z-e^{-i\pi/4}\right)f(z)=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(-1+i),$$

$$\operatorname{res}f\left(e^{i3\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\left(z-e^{i3\pi/4}\right)f(z)=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(1-i),$$

$$\operatorname{res}f\left(e^{-i3\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{-i3\pi/4}}\left(z-e^{-i3\pi/4}\right)f(z)=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)。$$

若 C 为 $|z-1|=2$，则 C 包围四个极点，

原积分 $=2\pi i\left[\operatorname{res}f\left(e^{i\pi/4}\right)+\operatorname{res}f\left(e^{-i\pi/4}\right)+\operatorname{res}f\left(e^{i3\pi/4}\right)+\operatorname{res}f\left(e^{-i3\pi/4}\right)\right]=0$。

若 C 为 $|z-1|=1$，则 C 包围两个极点 $e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$，

原积分 $=2\pi i\left[\operatorname{res}f\left(e^{i\pi/4}\right)+\operatorname{res}f\left(e^{-i\pi/4}\right)\right]=-\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$。

（2）$\operatorname{res}f(1)=\lim_{z\to 1}\dfrac{\sin\dfrac{\pi z}{4}}{z+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$\operatorname{res}f(-1)=\lim_{z\to 1}\dfrac{\sin\dfrac{\pi z}{4}}{z-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$。

(i) C 不包围两个极点 ± 1，所以原积分$=0$。

(ii) C 包围 1，原积分 $= 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(1) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} i$。

(iii) C 包围 ± 1，原积分 $= 2\pi i \left[\operatorname{res} f(1) + \operatorname{res} f(-1) \right] = \sqrt{2}\pi i$。

（3）被积函数具有一阶极点 0，$\pm\sqrt[3]{k}$，$\sqrt[3]{k} e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$，$\sqrt[3]{k} e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$。（$k = 1, 2, \cdots$）

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{z^3}{e^{2\pi i z^3} - 1} = \frac{1}{2\pi i},$$

$$\operatorname{res} f\left(\pm\sqrt[3]{k}\right) = \lim_{z \to \pm\sqrt[3]{k}} \frac{\left(z \mp \sqrt[3]{k}\right) z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} = \lim_{z \to \pm\sqrt[3]{k}} \frac{z^2 + 2z\left(z \mp \sqrt[3]{k}\right)}{6\pi i z^2 e^{2\pi i z^3}} = \frac{1}{6\pi i},$$

$$\operatorname{res} f\left(\sqrt[3]{k} e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6\pi i}, \quad \operatorname{res} f\left(\sqrt[3]{k} e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{1}{6\pi i}.$$

$|z| = R$（$\sqrt[3]{n} < R < \sqrt[3]{n+1}$）包围 0，$\pm\sqrt[3]{k}$，$\sqrt[3]{k} e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$，$\sqrt[3]{k} e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$。（$k = 1, 2, \cdots, n-1, n$）

共 $6n+1$ 个奇点。原积分 $= 2\pi i \left(6n \cdot \dfrac{1}{6\pi i} + \dfrac{1}{2\pi i} \right) = 2n + 1$。

（4）被积函数有一阶极点 $k + \dfrac{1}{2}$（$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）。

$$\operatorname{res} f\left(k + \frac{1}{2}\right) = \lim_{z \to k+\frac{1}{2}} \frac{\left(z - k - \dfrac{1}{2}\right) \sin \pi z}{\cos \pi z} = \lim_{z \to k+\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi z + \pi\left(z - k - \dfrac{1}{2}\right)\cos \pi}{-\pi \sin \pi z} = -\frac{1}{\pi}.$$

$|z| = n$ 包围 $k + \dfrac{1}{2}$（$k = -n, -(n-1), \cdots, 0, 1, \cdots, n-1$）共 $2n$ 个奇点。

原积分 $= 2\pi i \left[2n \cdot \left(-\dfrac{1}{\pi} \right) \right] = -4ni$。

（5）被积函数 $f(z)$ 有三阶极点 0，一阶极点 $\pm\sqrt[10]{2}$，$\sqrt[10]{2} e^{\pm i\frac{k\pi}{5}}$，（$k = 1, 2, 3, 4$）

$f(1/t) = \dfrac{t^{13}}{1 - 2t^{10}}$，可看出 ∞ 点为解析点，即 ∞ 点留数为 0，所以所有有限奇点留数之和为

0，而 $|z| = 2$ 包围所有有限奇点，所以原积分$=0$。

（6）$\operatorname{res} f(0) = \dfrac{1}{2} \lim_{z \to 0} \dfrac{d^2}{dz^2} e^z = \dfrac{1}{2}$，原积分 $= 2\pi i \cdot \dfrac{1}{2} = \pi i$。

（7）$f(z) = 1 + z^{-2} + \dfrac{1}{2} z^{-4} + \cdots$，所以 $\operatorname{res} f(0) = 0$，原积分$=0$。

（8）被积函数有一阶极点 $i\dfrac{k}{m}\pi$ （$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。

$$\operatorname{res} f\left(i\frac{k}{m}\pi\right)=\lim_{z\to ik\pi/m}\frac{\left(z-ik\pi/m\right)e^z}{\operatorname{sh} mz}=\frac{(-1)^k}{m}e^{i\frac{k}{m}\pi}\text{。}$$

$$\text{原积分}=2\pi i\sum_{k=-n}^{n}\operatorname{res} f\left(i\frac{k}{m}\pi\right)=\frac{2\pi i}{m}\sum_{k=-n}^{n}\left(-e^{i\frac{\pi}{m}}\right)^k=(-1)^n\frac{2\pi i}{m}\frac{\cos\dfrac{2n+1}{2m}\pi}{\cos\dfrac{\pi}{2m}}\text{。}$$

136．计算积分 $\displaystyle\oint_{C_n}\frac{\cot\pi z}{z^2}dz$ ，其中 C_n 是以 $\left(\pm\dfrac{2n+1}{2},\pm\dfrac{2n+1}{2}\right)$ 为顶点的正方形。令

$n\to\infty$ ，就得到级数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ 之和。若把被积函数换成 $\dfrac{\csc\pi z}{z^2}$ ，又能得到什么结果？
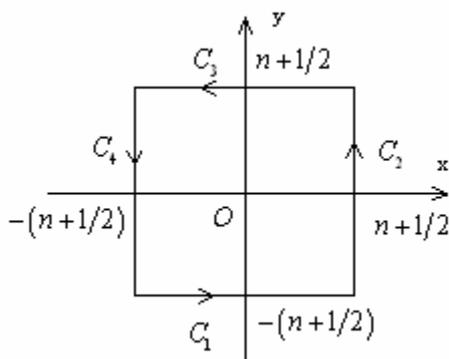
被积函数 $f(z)=\dfrac{\cot\pi z}{z^2}$ 三阶极点 0 和一阶极点 k （$k=\pm1,\pm2,\cdots$）。

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z\cot\pi z\right)=\pi\lim_{z\to0}\frac{\pi z\cos\pi z-\sin\pi z}{\sin^3\pi z}=-\frac{\pi}{3}\text{ ，}$$

$$\operatorname{res} f(k)=\lim_{z\to0}\frac{(z-k)\cos\pi z}{z^2\sin\pi z}=\frac{1}{\pi k^2}\text{。}$$

所以 $\displaystyle\oint_{C_n}\frac{\cot\pi z}{z^2}dz=2\pi i\left[\operatorname{res} f(0)+\sum_{\substack{k=-n\\k\neq0}}^{n}\operatorname{res} f(k)\right]=2\pi i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)\text{。}$

在 C_1 上有 $\left|\cot\pi z\right|=\left|\dfrac{\cos\pi\left[x-i(n+1/2)\right]}{\sin\pi\left[x-i(n+1/2)\right]}\right|\leq\dfrac{\operatorname{ch}\pi(n+1/2)}{\operatorname{sh}\pi(n+1/2)}=\coth\pi(n+1/2)$ ，（参考习题

02 的第 43 题）易证 $\coth x$ 为单调减函数，所以有 $\left|\cot\pi z\right|\leq\coth\dfrac{3\pi}{2}$ 。（$n\geq1$）

上式在 C_3 上同样成立。

在 C_2 上有 $\left| \cot \pi z \right| = \left| \dfrac{\cos \pi \left[(n+1/2) + iy \right]}{\sin \pi \left[(n+1/2) + iy \right]} \right|$

$$\leq \frac{\operatorname{ch} \pi y}{\sqrt{\sin^2 \pi (n+1/2) \operatorname{ch}^2 \pi y + \cos^2 \pi (n+1/2) \operatorname{sh}^2 \pi y}} \leq \frac{\operatorname{ch} \pi y}{\left| \sin \pi (n+1/2) \operatorname{ch} \pi y \right|} = 1$$

上式在 C_4 上同样成立。所以在 C_n 上有 $\left| \cot \pi z \right| \leq M = \max \left\{ \coth \dfrac{3\pi}{2}, 1 \right\}$。

在 C_n 上有 $|z| \geq n + \dfrac{1}{2}$，由此得 $\left| \displaystyle\oint_{C_n} \frac{\cot \pi z}{z^2} dz \right| \leq \oint_{C_n} \frac{\left| \cot \pi z \right|}{|z|^2} |dz| \leq M \cdot \dfrac{1}{(n+1/2)^2} \cdot 4(2n+1)$。

所以当 $n \to \infty$ 时有 $\displaystyle\oint_{C_n} \frac{\cot \pi z}{z^2} dz \to 0$。由此可得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$。

若令 $f(z) = \dfrac{\csc \pi z}{z^2}$，则有 $\operatorname{res} f(0) = \dfrac{\pi}{6}$，$\operatorname{res} f(k) = \dfrac{(-1)^k}{\pi k^2}$。

$$\oint_{C_n} \frac{\csc \pi z}{z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} \right)。$$

同样可得当 $n \to \infty$ 时，$\displaystyle\oint_{C_n} \frac{\csc \pi z}{z^2} dz \to 0$，所以 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$。

137．如果 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 中有奇点，通过变换 $z=e^{i\theta}$，$R(\sin\theta,\cos\theta)$ 变为

$f(z)=R\left(\dfrac{z^2-1}{2iz},\dfrac{z^2+1}{2z}\right)$，则 $f(z)$ 在单位圆周 $|z|=1$ 上有奇点。设这些奇点 β_k

（$k=1,2,\cdots m$）均为一阶奇点，证明：

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=2\pi\sum_{|z|<1}\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}+\pi\sum_{k=1}^m\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}。$$

其中 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 表示 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函数。

证：
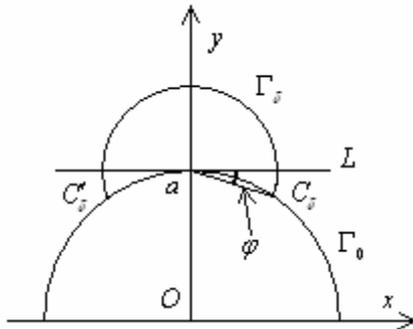
如上图，Γ_0 是以原点为圆心，a 为半径的上半圆，Γ_δ 是以 $(0,a)$ 为圆心，δ 为半径的圆被

Γ_0 截断的圆外部分。L 是 Γ_0 过点 $(0,a)$ 的切线，C_δ 和 C_δ' 是 Γ_δ 夹在 Γ_0 和 L 之间的部分，

Γ_δ 的上半圆部分 $\Gamma_\delta'=\Gamma_\delta-C_\delta-C_\delta'$。

参考第 86 题（习题 04）的证明，设 $(z-a)f(z)$ 在 Γ_δ 上一致趋于 k，则对任意 $\varepsilon>0$，存

在 δ' 满足 $0<\delta'<\varepsilon$，使得当 $\delta<\delta'<\varepsilon$ 时有

$$\left|\int_{C_\delta}f(z)dz\right|=\left|\int_{C_\delta}f(z)dz-ik\varphi+ik\varphi\right|\le\left|\int_{C_\delta}f(z)dz-ik\varphi\right|+k\varphi<(\varepsilon+k)\varphi。$$

由上图可解出 $\varphi=\arctan\dfrac{\delta}{2a\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2}}$，则 $\varphi\le\dfrac{\delta}{2a\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2}}<\dfrac{\delta'}{2a\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta'}{2a}\right)^2}}$（这是

关于 δ 的单调增函数）。只要上面的 δ' 足够小就有

$$\varphi<\frac{\delta'}{2a\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta'}{2a}\right)^2}}<\frac{\delta'}{2a}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta'}{2a}\right)^2\right]<\frac{\delta'}{2a}\left(1+\frac{1}{8a^2}\right)<\frac{1}{2a}\left(1+\frac{1}{8a^2}\right)\varepsilon，$$

所以 $\left|\int_{C_\delta} f(z)dz\right| < \varepsilon\varphi + k\varphi < \frac{1}{2a}\left(1+\frac{1}{8a^2}\right)\left(k\varepsilon + \varepsilon^2\right)$，这就证明了 $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = 0$。

所以 $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{\Gamma_\delta} f(z)dz = \lim\limits_{\delta\to 0}\left[\int_{\Gamma'_\delta} f(z)dz + \int_{C_\delta} f(z)dz + \int_{C'_\delta} f(z)dz\right]$

$$= \lim\limits_{\delta\to 0}\int_{\Gamma'_\delta} f(z)dz = k\pi i = \pi i \lim\limits_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]。$$

在单位圆上挖去奇点 β_k，代之以以 β_k 为圆心，δ 为半径，被单位圆截断的圆弧 C_k

（$k=1,2,\cdots m$），用 C_0 表示单位圆剩下的部分。这样构成一个包围单位圆内奇点和 β_k

（$k=1,2,\cdots m$）的围线 $C = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_m$。则

$$\oint_C \frac{f(z)}{iz}dz = 2\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} + 2\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}$$

又有 $\lim\limits_{\delta\to 0}\oint_C \frac{f(z)}{iz}dz = \lim\limits_{\delta\to 0}\oint_{C_0} \frac{f(z)}{iz}dz + \lim\limits_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{m}\oint_{C_k} \frac{f(z)}{iz}dz$

$$= \int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta + \pi i\sum_{k=1}^{m}\lim\limits_{z\to\beta_k}\frac{(z-\beta_k)f(z)}{iz}$$

$$= \int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta + \pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}$$

所以有 $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta = 2\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} + \pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}$。

138．计算下列积分：（1）$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x + p^2}$，$0<p<1$；（2）$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$；

（3）$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$，$a>b>0$；（4）$\int_0^{2\pi}\cos^{2n} xdx$；（5）$\int_0^{2\pi}\exp\left(e^{i\theta}\right)d\theta$；

（6）$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$；（7）$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}$；（8）$\int_0^{\pi}\cot(x-\alpha)dx$，$\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$。

（1）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-2p\dfrac{z^2+1}{2z}+p^2}=-\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{(z-p)\left(z-\dfrac{1}{p}\right)}$，则 $\operatorname{res}f(p)=\dfrac{1}{1-p^2}$。

原积分 $=2\pi\operatorname{res}f(p)=\dfrac{2\pi}{1-p^2}$。

（2）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}=\dfrac{2}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}$，则 $\operatorname{res}f(-2+\sqrt{3})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

原积分 $=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$。

（3）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{\left(a+b\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}=\dfrac{4}{b^2}\dfrac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$，其中 $z_1=-\dfrac{a}{b}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}$，

$z_2=-\dfrac{a}{b}+\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}$。 $-\dfrac{a}{b}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}<-\dfrac{a}{b}<-1$，所以 $|z_1|>1$，在单位圆外，

$|z_2|=\left|-\dfrac{a}{b}+\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}\right|=1\left/\left|-\dfrac{a}{b}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}\right|\right.<1$，在单位圆内。

$\operatorname{res}f(z_2)=\lim\limits_{z\to z_2}\dfrac{d}{dz}\left[(z-z_2)^2f(z)\right]=\dfrac{a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$，

所以原积分 $=\dfrac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$。

（4）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}=\dfrac{1}{2^{2n}}\dfrac{(1+z^2)^{2n}}{z^{2n+1}}=\dfrac{1}{2^{2n}z^{2n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}z^{2k}$，

$$\operatorname{res}f(0)=\lim_{z\to0}\left[\dfrac{1}{2^{2n}(2n)!}\dfrac{d^{2n}}{dz^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}z^{2k}\right]$$

$$=\dfrac{1}{2^{2n}(2n)!}\dfrac{d^{2n}}{dz^{2n}}\left[1+a_1z+\cdots+\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}z^{2n}+\cdots+z^{4n}\right]_{z=0}$$

$$=\dfrac{1}{2^{2n}(2n)!}\left[0+0+\cdots+\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}(2n)!+b_{2n+1}z+\cdots+b_{4n}z^{2n}\right]_{z=0}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

所以原积分 $= 2\pi \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = 2\pi \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 2\cdot 1}{2^{2n} n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 \cdots 2^2 \cdot 1^2}$

$$= 2\pi \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 2\cdot 1}{(2n)^2 (2n-2)^2 (2n-4)^2 \cdots 2^2} = 2\pi \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2}$$

$$= 2\pi \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \text{。}$$

（5）令 $f(z) = \dfrac{1}{z} e^z$，则 $\operatorname{res} f(0) = 1$，原积分 $= 2\pi$。

（6）原积分 $= \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{2 d\theta}{3 - \cos 2\theta} = \int_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{3 - \cos\varphi}$。

令 $f(z) = \dfrac{1}{z} \dfrac{1}{3 - \dfrac{z^2+1}{2z}} = -\dfrac{2}{(z - 3 - 2\sqrt{2})(z - 3 + 2\sqrt{2})}$，则 $\operatorname{res} f(3 - 2\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$。

原积分 $= \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$。

（7）原积分 $= \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{4 d\theta}{(3 - \cos 2\theta)^2} = \int_0^{2\pi} \dfrac{2 d\varphi}{(3 - \cos\varphi)^2}$。

令 $f(z) = \dfrac{1}{z} \dfrac{2}{\left(3 - \dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \dfrac{8z}{(z - 3 - 2\sqrt{2})^2 (z - 3 + 2\sqrt{2})^2}$，则

$\operatorname{res} f(3 - 2\sqrt{2}) = \displaystyle\lim_{z \to 3 - 2\sqrt{2}} \dfrac{d}{dz} \dfrac{8z}{(z - 3 - 2\sqrt{2})^2} = \dfrac{3}{8\sqrt{2}}$，原积分 $= \dfrac{3}{4\sqrt{2}} \pi$。

（8）令 $\alpha = a + ib$，原积分 $= i \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{e^{i(x-a-ib)} + e^{-i(x-a-ib)}}{e^{i(x-a-ib)} - e^{-i(x-a-ib)}} dx = i \int_0^\pi \dfrac{e^{i2(x-a-ib)} + 1}{e^{i2(x-a-ib)} - 1} dx$

$= \dfrac{i}{2} \displaystyle\int_{-2a}^{2\pi - 2a} \dfrac{e^{2b} e^{i\theta} + 1}{e^{2b} e^{i\theta} - 1} d\theta$ （作代换 $2(x-a) = \theta$），因为被积函数以 2π 为周期，所以

原积分 $= \dfrac{i}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{e^{2b} e^{i\theta} + 1}{e^{2b} e^{i\theta} - 1} d\theta = \dfrac{1}{2} \oint_{|z|=1} \dfrac{e^{2b} z + 1}{z(e^{2b} z - 1)} dz$。

记 $f(z) = \dfrac{z + e^{-2b}}{2z(z - e^{-2b})}$，则 $\operatorname{res} f(0) = -\dfrac{1}{2}$，$\operatorname{res} f(e^{-2b}) = 1$。

若 $b > 0$，原积分 $= 2\pi i \cdot \left[\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f\left(e^{-2b}\right) \right] = \pi i$，

若 $b < 0$，原积分 $= 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0) = -\pi i$。

139. 计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$；（2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$，$a>0, b>0$；

（3）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1} dx$，$m,n$ 均为正整数，且 $n>m$；（4）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$，$n$ 为正整数；

（5）$\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$，$a>0$；　　（6）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+4}$；

（7）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x\cos\theta+1\right)}$，$\theta$ 为实数，且 $\sin\theta \neq 0$；

（8）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2}}$。

（1）令 $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4} = \dfrac{z^2}{\left(z-e^{i\pi/4}\right)\left(z-e^{-i\pi/4}\right)\left(z-e^{i3\pi/4}\right)\left(z-e^{-i3\pi/4}\right)}$。

$\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/4}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)$，　$\operatorname{res} f\left(e^{i3\pi/4}\right) = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)$。

所以 $\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/4}\right) + \operatorname{res} f\left(e^{i3\pi/4}\right) \right] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\pi$。

被积函数是偶函数，所以 $\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} 2\int_{0}^{b} f(x)dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\int_{-b}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{b} f(x)dx\right]$

$= \dfrac{1}{2}\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$，即 $\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 收敛，同样的，$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 也收敛，所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 收

敛，且等于 $\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$。后面类似的讨论省略。

（2）令 $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)} = \dfrac{1}{(z+ai)(z-ai)(z+bi)(z-bi)}$，则

$\operatorname{res} f(ai) = \dfrac{i}{2a\left(a^2-b^2\right)}$，　$\operatorname{res} f(bi) = -\dfrac{i}{2b\left(a^2-b^2\right)}$。

原积分 $= \mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}=2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(ai\right)+\operatorname{res} f\left(bi\right)\right]=\dfrac{\pi}{ab(a+b)}$。

（3）令 $f\left(z\right)=\dfrac{z^{2m}}{z^{2n}+1}$，它在上半平面的奇点是 $e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}$ （$k=0,1,2,\cdots n-1$）。

$$\operatorname{res} f\left[e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}\right]=\lim_{z\to e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}}\frac{z^{2m}}{\left(z^{2n}+1\right)'}=\lim_{z\to e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}}\frac{z^{2m-2n+1}}{2n}$$

$$=\frac{1}{2n}e^{ik(2m-2n+1)\frac{\pi}{n}}e^{i(2m-2n+1)\frac{\pi}{2n}}$$

原积分 $=\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx$

$$=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{res} f\left[e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}\right]=\frac{\pi i}{n}e^{i(2m-2n+1)\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik(2m-2n+1)\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{\pi i}{n}e^{i(2m-2n+1)\frac{\pi}{2n}}\frac{e^{i(2m-2n+1)\pi}-1}{e^{i(2m-2n+1)\frac{\pi}{n}}-1}=-\frac{\pi i}{n}\frac{2}{2i\sin\dfrac{(2m-2n+1)\pi}{2n}}$$

$$=\frac{\pi}{n\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{2n}}\text{。}$$

（4）令 $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{\left(z+i\right)^{n+1}\left(z-i\right)^{n+1}}$，则

$$\operatorname{res} f\left(i\right)=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{\left(z+i\right)^{n+1}}\right]_{z=i}^{(n)}=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2i)^{2n+1}}=\frac{1}{2i}\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}=\frac{1}{2i}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

所以原积分 $=\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}=2\pi i\operatorname{res} f\left(i\right)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$。

（5）令 $f\left(z\right)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2}=\dfrac{z^2}{\left(z+ai\right)^2\left(z-ai\right)^2}$，则 $\operatorname{res} f\left(ai\right)=\lim_{z\to ai}\dfrac{d}{dz}\dfrac{z^2}{\left(z+ai\right)^2}=\dfrac{1}{4ai}$。

同第（1）小题的讨论，有原积分 $=\dfrac{1}{2}\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi i\operatorname{res} f\left(ai\right)=\dfrac{\pi}{4a}$。（后面

类似讨论省略）

（6） $\dfrac{1}{x^2-2x+4}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$，所以 $\displaystyle\int_0^\infty\dfrac{dx}{x^2-2x+4}$ 收敛，$\displaystyle\int_{-\infty}^0\dfrac{dx}{x^2-2x+4}$ 也收敛，所以

$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\dfrac{dx}{x^2-2x+4}$ 收敛，可直接计算其主值。（（7）可同样讨论）。

令 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+4}=\dfrac{1}{\left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z-1+i\sqrt{3}\right)}$，$\operatorname{res}f\left(1+i\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}i}$，

原积分 $=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$。

（7）令 $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-2z\cos\theta+1\right)}=\dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)\left(z-e^{i\theta}\right)\left(z-e^{-i\theta}\right)}$，

$\operatorname{res}f(i)=-\dfrac{1}{4\cos\theta}$，$\operatorname{res}f\left(e^{i\theta}\right)=\dfrac{1}{2i\sin\theta\left(1+e^{-2i\theta}\right)}=\dfrac{1}{4\cos\theta}-\dfrac{i}{4\sin\theta}$，

$\operatorname{res}f\left(e^{-i\theta}\right)=-\dfrac{e^{-2i\theta}}{2i\sin\theta\left(1+e^{-2i\theta}\right)}=\dfrac{1}{4\cos\theta}+\dfrac{i}{4\sin\theta}$。

若 $\sin\theta>0$，则 $e^{i\theta}$ 在上半平面，原积分 $=2\pi i\left[\operatorname{res}f(i)+\operatorname{res}f\left(e^{i\theta}\right)\right]=\dfrac{\pi}{2\sin\theta}$，

若 $\sin\theta<0$，则 $e^{-i\theta}$ 在上半平面，原积分 $=2\pi i\left[\operatorname{res}f(i)+\operatorname{res}f\left(e^{-i\theta}\right)\right]=-\dfrac{\pi}{2\sin\theta}$，

所以原积分 $=\dfrac{\pi}{2|\sin\theta|}$。

（8）令 $f(z)=\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}$，则 $z=i$ 为二阶极点，$z=(2k+1)i$（$k=1,2,\cdots$）为一阶

极点。$\operatorname{res}f(i)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d}{dz}\dfrac{z-i}{(z+i)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{2i\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}-\dfrac{\pi}{2}\left(z^2+1\right)\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}}{(z+i)^2\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi z}{2}}$

$=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{\pi i\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}-\pi z\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+1\right)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{2(z+i)\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi z}{2}+\pi(z+i)^2\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}}$

$=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{-\pi\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2(z+i)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{2(z+i)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{z-i}+\pi(z+i)^2\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{z-i}}$

$$= \left. \frac{-\pi \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (z+i) \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2}}{\pi (z+i) \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} + \frac{\pi^2}{2}(z+i)^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{2}} \right|_{z=i} = \frac{1}{2\pi i} \text{。}$$

$$\operatorname{res} f\big[(2k+1)i\big] = \lim_{z \to (2k+1)i} \frac{2}{\pi(z^2+1)\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i} \frac{1}{k(k+1)} \text{。}（k=1,2,\cdots）$$

取这样的积分路径：实轴上 $-R_n$ 到 R_n，以原点为圆心，R_n 为半径的上半圆 C_n，这里

$R_n = 2n$。该闭合路径包围奇点 $(2k+1)i$（$k=0,1,\cdots n-1$），且路径上没有奇点。有

$$\int_{-2n}^{2n} f(x)\,dx + \int_{C_n} f(z)\,dz = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\text{。} \qquad (*)$$

在 C_n 上有 $z_n = 2n(\cos\theta + i\sin\theta)$，$\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2} = \frac{1}{2}\Big[e^{n\pi(\cos\theta + i\sin\theta)} + e^{-n\pi(\cos\theta + i\sin\theta)}\Big]$（$0 \le \theta \le \pi$），

当 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\theta > 0$，$e^{n\pi(\cos\theta + i\sin\theta)} \to \infty, e^{-n\pi(\cos\theta + i\sin\theta)} \to 0$，$\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2} \to \infty$，

当 $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ 时，$\cos\theta < 0$，$e^{n\pi(\cos\theta + i\sin\theta)} \to 0, e^{-n\pi(\cos\theta + i\sin\theta)} \to \infty$，$\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2} \to \infty$，

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2} = \cos n\pi$，$\left|\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2}\right| = 1$。

综上，$0 \le \theta \le \pi$ 时存在 N，当 $n > N$ 时有 $\left|\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2}\right| \ge 1$。在 C_n 上

$$\left| z_n \cdot \frac{1}{(1+z_n^2)\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2}} \right| \le \frac{z_n}{1+z_n^2} \text{（}n > N\text{）}, \text{所以} \lim_{n\to\infty} z_n f(z_n) = 0 \text{，由此得} \lim_{n\to\infty}\int_{C_n} f(z)\,dz = 0 \text{。}$$

令（*）式 $n \to \infty$ 可得

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\text{。}$$

易知 $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$，（$|x|<1$）由于右边级数在 $x=1$ 收敛，根据 Abel 第二定理，

该级数在 $x=1$ 点左连续，对上式两边取 $x \to 1-0$ 可得 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$。

所以 $\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{ch}\dfrac{\pi x}{2}}=2\ln 2$。

由于 $\mathrm{ch}\dfrac{\pi x}{2}\ge 1$，所以 $\left|\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\mathrm{ch}\dfrac{\pi x}{2}}\right|\le\dfrac{1}{1+x^2}$，因为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$ 收敛，所以原积分收敛，

且等于其主值。

140. 计算下面积分：（1）$\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{\cos x}{1+x^4}dx$；（2）$\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx$，$a>0,m>0$；

（3）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-2x+2}dx$；（4）$\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{x^3\sin mx}{x^4+4a^4}dx$，$a>0,m>0$；（5）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos mx}{(x+b)^2+a^2}dx$，

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin mx}{(x+b)^2+a^2}dx$，$a>0,m>0$；（6）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{a\cos x+x\sin x}{x^2+a^2}dx$，$a>0$；

（7）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin^2 ax}{\left(x^2+b^2\right)\left(x^2+c^2\right)}dx$，$a>0,b>0,c>0$；（8）$\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{\cos x}{\mathrm{ch}\,x}dx$。

（1）令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^4}=\dfrac{e^{iz}}{\left(z-e^{i\pi/4}\right)\left(z-e^{-i\pi/4}\right)\left(z-e^{i3\pi/4}\right)\left(z-e^{-i3\pi/4}\right)}$。

$\mathrm{res}\,f\left(e^{i\pi/4}\right)=\dfrac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)}$，$\mathrm{res}\,f\left(e^{i3\pi/4}\right)=\dfrac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}e^{-i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)}$。

原积分 $=\dfrac{1}{2}\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos x}{1+x^4}dx$

$\qquad =\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi i\left[\mathrm{res}\,f\left(e^{i\pi/4}\right)+\mathrm{res}\,f\left(e^{i3\pi/4}\right)\right]\right\}=\dfrac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{4}\right)$。

（2）令 $f(z)=\dfrac{ze^{imz}}{z^2+a^2}=\dfrac{ze^{imz}}{(z+ai)(z-ai)}$，则 $\mathrm{res}\,f(ai)=\dfrac{1}{2}e^{-ma}$。

原积分 $=\dfrac{1}{2}\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi i\,\mathrm{res}\,f(ai)\right]=\dfrac{\pi}{2}e^{-ma}$。

（3）令 $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}=\dfrac{ze^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)}$，则 $\mathrm{res}\,f(1+i)=\dfrac{1}{\sqrt{2}ei}e^{i\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}$。

$\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-2x+2}dx=\mathrm{Im}\left[2\pi i\cdot\mathrm{res}\,f(1+i)\right]=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{e}\sin\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)$。

由于 $\dfrac{x}{x^2-2x+2}$ 单调趋于 0，$\left|\displaystyle\int_0^b \sin x\,dx\right|=|1-\cos b|\le 2$，所以原积分收敛（狄里克莱判敛法），等于其主值。

（4）$f(z)=\dfrac{z^3 e^{imz}}{z^4+4a^4}=\dfrac{z^3 e^{imz}}{\left(z-\sqrt{2}ae^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}ae^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}ae^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}ae^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)}$。

则 $\operatorname{res} f\left(\sqrt{2}ae^{i\pi/4}\right)=\dfrac{1}{4}e^{-ma}e^{ima}$，$\operatorname{res} f\left(\sqrt{2}ae^{i3\pi/4}\right)=\dfrac{1}{4}e^{-ma}e^{-ima}$。

原积分 $=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{x^3\sin mx}{x^4+4a^4}\,dx$

$\qquad\quad =\dfrac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(\sqrt{2}ae^{i\pi/4}\right)+\operatorname{res} f\left(\sqrt{2}ae^{i3\pi/4}\right)\right]\right\}=\dfrac{\pi}{2}e^{-ma}\cos ma$。

（5）令 $f(z)=\dfrac{e^{imz}}{(z+b)^2+a^2}=\dfrac{e^{imz}}{(z+b+ai)(z+b-ai)}$，$\operatorname{res} f(-b+ai)=\dfrac{e^{-ma}}{2ai}e^{-imb}$。

所以 $\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\cos mx}{(x+b)^2+a^2}\,dx=\operatorname{Re}\left[2\pi i\operatorname{res} f(-b+ai)\right]=\dfrac{\pi}{a}e^{-ma}\cos mb$，

$\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\sin mx}{(x+b)^2+a^2}\,dx=\operatorname{Im}\left[2\pi i\operatorname{res} f(-b+ai)\right]=-\dfrac{\pi}{a}e^{-ma}\sin mb$。

由于 $\left|\dfrac{\cos x}{(x+b)^2+a^2}\right|\le\dfrac{1}{(x+b)^2+a^2}$，$\left|\dfrac{\sin x}{(x+b)^2+a^2}\right|\le\dfrac{1}{(x+b)^2+a^2}$ 所以原积分收敛，等于其主值。

（6）令上小题第一个积分中 $b=0,m=1$ 可得 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx=\dfrac{\pi}{a}e^{-a}$，

令第（2）小题中 $m=1$ 可得 $\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx=\pi e^{-a}$。

所以原积分 $=2\pi e^{-a}$。

（7）原积分 $=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,dx-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\cos 2ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,dx$。

令 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}=\dfrac{1}{(z+bi)(z-bi)(z+ci)(z-ci)}$，

$\operatorname{res} f(bi)=-\dfrac{1}{2b(b^2-c^2)i}$，$\operatorname{res} f(ci)=\dfrac{1}{2c(b^2-c^2)i}$。

则 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,dx=2\pi i\left[\operatorname{res} f(bi)+\operatorname{res} f(ci)\right]=\dfrac{\pi}{bc(b+c)}$。

令 $f(z) = \dfrac{e^{2iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)} = \dfrac{e^{2iaz}}{(z+bi)(z-bi)(z+ci)(z-ci)}$，

$\operatorname{res} f(bi) = -\dfrac{e^{-2ab}}{2b(b^2-c^2)i}$，$\operatorname{res} f(ci) = \dfrac{e^{-2ac}}{2c(b^2-c^2)i}$。则

$\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos 2ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res}f(bi)+\operatorname{res}f(ci)\right]\right\} = \dfrac{\pi}{b^2-c^2}\left(\dfrac{e^{-2ac}}{c}-\dfrac{e^{-2ab}}{b}\right)$

由于 $\left|\dfrac{\sin^2 ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\right| \le \dfrac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$，所以原积分收敛且

原积分 $= \dfrac{\pi\left(b-c+ce^{-2ab}-be^{-2ac}\right)}{2bc(b^2-c^2)}$。

（8）令 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{\operatorname{ch} z}$，它有一阶极点 $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$（$k=0,1,\cdots$）。

$\operatorname{res} f\left[\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i\right] = \lim\limits_{z\to\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i}\dfrac{e^{iz}}{\operatorname{sh} z} = \dfrac{(-1)^k}{i}e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$，$\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{2}i\right) = \dfrac{1}{i}e^{-\frac{\pi}{2}}$。

选取如下积分路径：
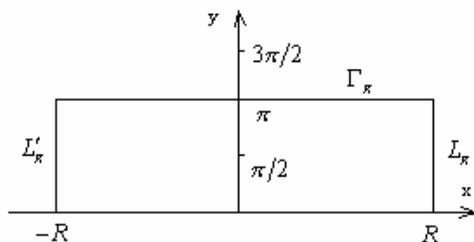
$\displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{L_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{L_R'} f(z)dz = 2\pi i\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{2}i\right) = 2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}$。 （*）

因为 $\left|\operatorname{ch}(R+yi)\right| = \left|\operatorname{ch}R\cos y + i\operatorname{sh}R\sin y\right| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 R\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 R\sin^2 y}$

$= \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 R} \ge \operatorname{sh} R$，所以 $\left|\displaystyle\int_{L_R} f(z)dz\right| = \left|\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{e^{i(R+yi)}}{\operatorname{ch}(R+yi)}dy\right| \le \displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{e^{-y}}{\operatorname{sh}R}dy = \dfrac{2(1-e^{-\pi})}{e^R-e^{-R}}$。

因此 $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{L_R} f(z)dz = 0$，同样有 $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{L_R'} f(z)dz = 0$。

$\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_R^{-R}\dfrac{e^{i(x+\pi i)}}{\operatorname{ch}(x+\pi i)}dx = -e^{-\pi}\int_R^{-R}\dfrac{e^{ix}}{\operatorname{ch}x}dx = e^{-\pi}\int_{-R}^{R} f(x)dx$，代入（*）式并令

$R \to \infty$ 得 $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{ix}}{\operatorname{ch} x} dx = \dfrac{\pi e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}} = \dfrac{\pi}{\operatorname{ch} \dfrac{\pi}{2}}$。所以原积分 $= \dfrac{\pi}{2\operatorname{ch} \dfrac{\pi}{2}}$。

141. 计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)} dx$，$a > 0, m > 0$；（2）$\text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x(x-1)(x-2)}$；

（3）$\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$，$a > 0, b > 0$；（4）$\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2 - a^2} dx$，$a > 0$；

（5）$\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sin^3 x}{x^3} dx$；　　　（6）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^x} dx$，$0 < p < 1, 0 < q < 1$；

（7）$\text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2 - 5x - 6} dx$；　　　（8）$\text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$。

（1）取下图积分路径：
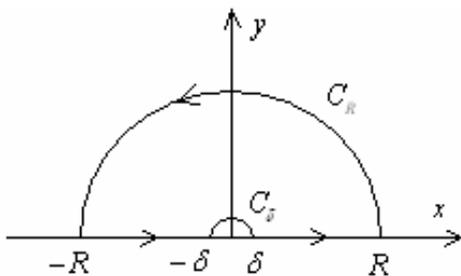
令 $f(z) = \dfrac{e^{imz}}{z(z^2 + a^2)}$，则 $\operatorname{res} f(ai) = -\dfrac{e^{-ma}}{2a^2}$，所以

$$\int_{-R}^{-\delta} \dfrac{e^{imx}}{x(x^2 + a^2)} dx + \int_{C_\delta} \dfrac{e^{imz}}{z(z^2 + a^2)} dz + \int_{\delta}^{R} \dfrac{e^{imx}}{x(x^2 + a^2)} dx + \int_{C_R} \dfrac{e^{imz}}{z(z^2 + a^2)} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(ai) = -\dfrac{\pi i e^{-ma}}{a^2}。 \qquad\qquad (*)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} \dfrac{e^{imz}}{z(z^2 + a^2)} dz = -\pi i \lim_{z \to 0} z \cdot \dfrac{e^{imz}}{z(z^2 + a^2)} = -\dfrac{\pi i}{a^2},$$

因为 $\displaystyle\lim_{z \to \infty} \dfrac{e^{imz}}{z(z^2 + a^2)} = 0$，所以 $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \dfrac{e^{imz}}{z(z^2 + a^2)} dz = 0$，

令（*）式 $\delta \to 0, R \to \infty$ 得到 $\text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{imx}}{x(x^2 + a^2)} dx = \dfrac{\pi i}{a^2}\left(1 - e^{-ma}\right)$，

所以 $\int_0^\infty \dfrac{\sin mx}{x\left(x^2+a^2\right)}dx = \dfrac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-ma}\right) = \dfrac{\pi}{a^2}e^{-\frac{1}{2}ma}\,\text{sh}\,\dfrac{ma}{2}$ 。

（2）取下图积分路径：
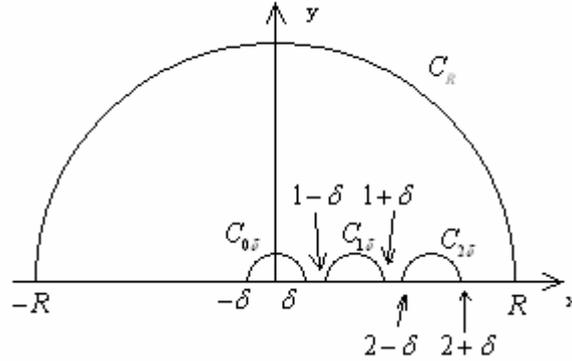
令 $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z\left(z-1\right)\left(z-2\right)}$ ， 则 $\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\int_{C_{0\delta}}f\left(z\right)dz = -\pi i\lim_{z\to 0}\dfrac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)} = -\dfrac{\pi}{2}i$ ，

$\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\int_{C_{1\delta}}f\left(z\right)dz = -\pi i\lim_{z\to 1}\dfrac{1}{z\left(z-2\right)} = \pi i$ ，

$\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\int_{C_{2\delta}}f\left(z\right)dz = -\pi i\lim_{z\to 2}\dfrac{1}{z\left(z-1\right)} = -\dfrac{\pi}{2}i$

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f\left(z\right)dz = \pi i\lim_{z\to\infty}\dfrac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)} = 0$ 。

$\displaystyle\int_{-R}^{-\delta}f\left(x\right)dx + \int_{C_{0\delta}}f\left(z\right)dz + \int_{\delta}^{1-\delta}f\left(x\right)dx + \int_{C_{1\delta}}f\left(z\right)dz + \int_{1+\delta}^{2-\delta}f\left(x\right)dx + \int_{C_{2\delta}}f\left(z\right)dz$

$+\displaystyle\int_{2+\delta}^{R}f\left(x\right)dx + \int_{C_R}f\left(z\right)dz = 0$

令上式 $\delta\to 0, R\to\infty$ 得到 $\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x\left(x-1\right)\left(x-2\right)} = 0$ 。

（3）令 $f\left(z\right)=\dfrac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$ ，取与第（1）小题相同的积分路径，

$\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f\left(z\right)dz = -\pi i\lim_{z\to 0}\dfrac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z} = \pi\left(a-b\right)$ ，

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f\left(z\right)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\dfrac{e^{iaz}}{z^2}dz - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\dfrac{e^{ibz}}{z^2}dz = 0$ ，

对该路径的积分取 $\delta \to 0, R \to \infty$ 的极限可得 $\int_0^\infty \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \dfrac{\pi}{2}(b-a)$。

（4）原积分 $= \dfrac{1}{2}\int_0^\infty \dfrac{\cos 2a - \cos 2x}{x^2 - a^2} dx$。令 $f(z) = \dfrac{\cos 2a - e^{2iz}}{z^2 - a^2}$，

取如下积分路径：
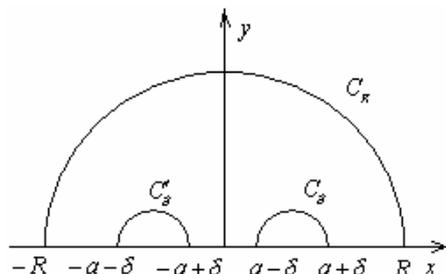
$$\lim_{\delta \to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = -\pi i \lim_{z \to a}(z-a)f(z) = \frac{\pi\left(\cos 2a - e^{2ia}\right)}{2ai},$$

$$\lim_{\delta \to 0}\int_{C'_\delta} f(z)dz = -\pi i \lim_{z \to -a}(z+a)f(z) = -\frac{\pi\left(\cos 2a - e^{-2ia}\right)}{2ai}。$$

$$\lim_{R \to \infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0。$$

$$\int_{-R}^{-a-\delta} f(x)dx + \int_{C_\delta} f(z)dz + \int_{-a+\delta}^{a-\delta} f(x)dx + \int_{C_\delta} f(z)dz + \int_{a+\delta}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

令 $\delta \to 0, R \to \infty$ 得 $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos 2a - e^{2ix}}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{\pi}{a}(\sin 2a - i\cos 2a)$。

所以原积分 $= \dfrac{1}{4}\text{Re}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos 2a - e^{2ix}}{x^2 - a^2} dx\right) = \dfrac{\pi}{4a}\sin 2a$。

（5）$\sin^3 x = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\sin x = \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$。

原积分 $= \int_0^\infty \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} dx$。令 $f(z) = \dfrac{3e^{iz} - e^{3iz} - 2}{4z^3}$，取与第（1）小题相同的积分

路径，有

$$\lim_{\delta \to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = -\pi i \lim_{z \to 0}\frac{3e^{iz} - e^{3iz} - 2}{4z^2} = -\frac{3}{4}\pi i , \quad \lim_{R \to \infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0。$$

令围线积分 $\delta \to 0, R \to \infty$ 得 $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{3e^{ix} - e^{3ix} - 2}{4x^3} dx = \dfrac{3}{4}\pi i$，

原积分 $= \dfrac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{3e^{ix} - e^{3ix} - 2}{4x^3} dx \right) = \dfrac{3}{8}\pi$ 。

（6）令 $f(z) = \dfrac{e^{pz}}{1 - e^z}$ ， $2k\pi i$ （ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ）是其一阶极点。取如下积分路径：
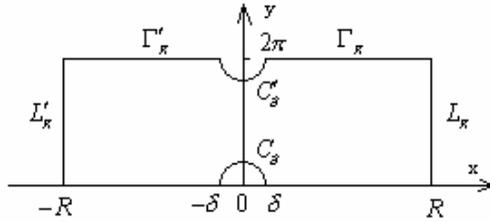
$$\int_{-R}^{-\delta} f(x)dx + \int_{C_\delta} f(z)dz + \int_{\delta}^{R} f(x)dx + \int_{L_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{C'_\delta} f(z)dz$$

$$+ \int_{\Gamma'_R} f(z)dz + \int_{L'_R} f(z)dz = 0 \ 。 \qquad\qquad (*)$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{R}^{\delta} \dfrac{e^{p(x+2\pi i)}}{1 - e^{(x+2\pi i)}}dx = -e^{2p\pi i}\int_{\delta}^{R} f(x)dx , \quad \int_{\Gamma'_R} f(z)dz = -e^{2p\pi i}\int_{-R}^{-\delta} f(x)dx ,$$

代入（*）式得

$$\left(1 - e^{2p\pi i}\right)\left[\int_{-R}^{-\delta} f(x)dx + \int_{\delta}^{R} f(x)dx \right] + \int_{C_\delta} f(z)dz + \int_{L_R} f(z)dz + \int_{C'_\delta} f(z)dz$$

$$+ \int_{L'_R} f(z)dz = 0 \ 。 \qquad\qquad (**)$$

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| \le \int_{0}^{2\pi} \left| \dfrac{e^{p(R+iy)}}{1 - e^{(R+iy)}} \right| dy = \int_{0}^{2\pi} \dfrac{e^{pR}}{\sqrt{\left(1 - e^R \cos y\right)^2 + e^{2R}\sin^2 y}} dy$$

$$= e^{pR} \int_{0}^{2\pi} \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2e^R \cos y + e^{2R}}} dy \le e^{pR} \int_{0}^{2\pi} \dfrac{1}{e^R - 1} dy = 2\pi \dfrac{e^{-(1-p)R}}{1 - e^{-R}} ,$$

所以 $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$ ，同样的， $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{\Gamma'_R} f(z)dz = 0$ 。

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z)dz = -\pi i \lim_{z \to 0} \dfrac{ze^{pz}}{1 - e^z} = \pi i ,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C'_\delta} f(z)dz = -\pi i \lim_{z \to 2\pi i} \dfrac{(z - 2\pi i)e^{pz}}{1 - e^z} = \pi i e^{2p\pi i} ,$$

令（**）式 $\delta \to 0, R \to \infty$ 可得 $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{px}}{1 - e^x}dx = \pi i \dfrac{e^{2p\pi i} + 1}{e^{2p\pi i} - 1} = \pi \cot(p\pi)$ ，

所以 $v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^x}dx=v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{px}}{1-e^x}dx-v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{qx}}{1-e^x}dx=\pi\big[\cot(p\pi)-\cot(q\pi)\big]$。

当 x 充分大时，有 $e^x-1\geq\dfrac{1}{2}e^x$（即 $e^x\geq2$）。不妨假设 $p>q$，

$\left|\dfrac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^x}\right|\leq2\dfrac{e^{px}-e^{qx}}{e^x}=2\big[e^{-(1-p)x}-e^{-(1-q)x}\big]$。由于 $\int_0^{\infty}\big[e^{-(1-p)x}-e^{-(1-q)x}\big]dx$ 收敛，所以

$\int_0^{\infty}\dfrac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^x}dx$ 收敛，类似地，$\int_{-\infty}^{0}\dfrac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^x}dx$ 收敛，所以原积分收敛，等于其主值。

（7）令 $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2-5z-6}=\dfrac{ze^{iz}}{(z-6)(z+1)}$。取如下积分路径：
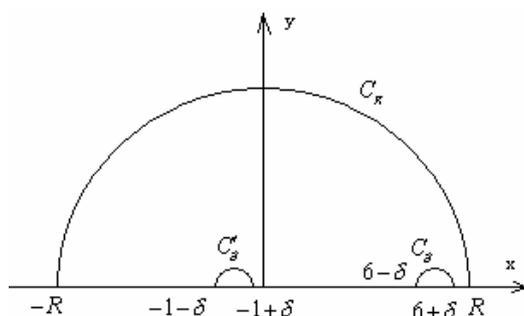
$\left(\int_{-R}^{-1-\delta}+\int_{-1+\delta}^{6-\delta}+\int_{6+\delta}^{R}\right)f(x)dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C'_\delta}+\int_{C_R}\right)f(z)dz=0$。 （＊）

因为 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{(z-6)(z+1)}=0$，所以 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$。

$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim\limits_{z\to6}\dfrac{ze^{iz}}{z+1}=\dfrac{6\pi}{7i}e^{6i}$，$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C'_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{ze^{iz}}{z-6}=\dfrac{\pi}{7i}e^{-i}$。

令（＊）式 $\delta\to0,R\to\infty$ 得 $v.p.\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\dfrac{\pi i}{7}\big(6e^{6i}+e^{-i}\big)$，

原积分 $=\mathrm{Re}\left[v.p.\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\right]=\dfrac{\pi}{7}\big(\sin1-6\sin6\big)$。

（8）令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}$，$\mathrm{res}\,f(2i)=\lim\limits_{z\to2i}\dfrac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)}=-\dfrac{e^{-2}}{20i}(1+2i)$。

取如下积分路径：
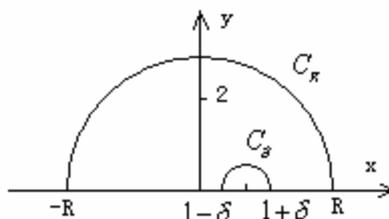
$$\left(\int_{-R}^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{R}\right)f(x)dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right)f(z)dz=2\pi i\operatorname{res}f(2i)=-\frac{\pi e^{-2}}{10}(1+2i)\text{。}\qquad(*)$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0\text{，}\quad\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to1}\frac{e^{iz}}{z^2+4}=-\frac{\pi i}{5}e^i\text{。}$$

令（*）$\delta\to0,R\to\infty$ 得原积分 $=\operatorname{Im}\left[\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\right]=\dfrac{\pi}{5}\left(\cos1-e^{-2}\right)$。

142．计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^s}{\left(1+x^2\right)^2}dx$，$-1<s<3$；（2）$\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}dx$，

$-1<p<1$，$0<\lambda<\pi$；（3）$\displaystyle\text{v.p.}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x}dx$，$0<a<1$；（4）$\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx$，$a>0$。

（1）令 $f(z)=\dfrac{z^s}{\left(1+z^2\right)^2}$，取如下积分路径，规定 $0\le\arg\le2\pi$，
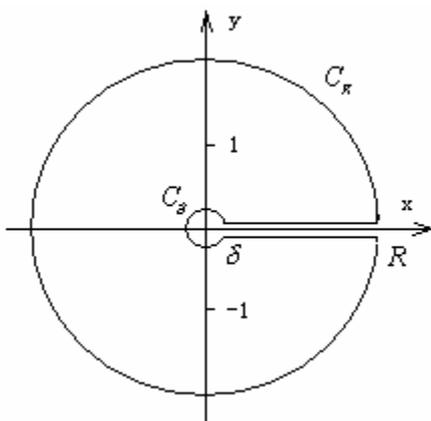
则 $\operatorname{res}f(i)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d}{dz}\dfrac{z^s}{(z+i)^2}=-\dfrac{s-1}{4i}e^{i\frac{s\pi}{2}}$，$\operatorname{res}f(-i)=\lim\limits_{z\to-i}\dfrac{d}{dz}\dfrac{z^s}{(z-i)^2}=\dfrac{s-1}{4i}e^{i\frac{3s\pi}{2}}$

（这里 $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$，$-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}$）。围道积分为：

$$\int_{\delta}^{R}\frac{x^s}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\int_{R}^{\delta}\frac{x^se^{2is\pi}}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right)f(z)dz$$

$$=2\pi i\left[\operatorname{res}f(i)+\operatorname{res}f(-i)\right]=i\pi(s-1)e^{is\pi}\sin\frac{s\pi}{2}\text{。}$$

即 $\left(1-e^{2is\pi}\right)\displaystyle\int_{\delta}^{R}\frac{x^s}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right)f(z)dz=i\pi(s-1)e^{is\pi}\sin\dfrac{s\pi}{2}$。

令上式 $\delta \to 0, R \to \infty$，由于 $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \lim\limits_{z \to \infty} z \cdot \dfrac{z^s}{\left(1+z^2\right)^2} = 0$，

$\lim\limits_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z)dz = -2\pi i \lim\limits_{z \to 0} z \cdot \dfrac{z^s}{\left(1+z^2\right)^2} = 0$，所以

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{i\pi(s-1)e^{is\pi}\sin\dfrac{s\pi}{2}}{1-e^{2is\pi}} = \frac{\pi}{4}(1-s)\sec\frac{s\pi}{2} 。$$

（2）令 $f(z) = \dfrac{z^{-p}}{z^2 + 2z\cos\lambda + 1} = \dfrac{z^{-p}}{\left(z+e^{i\lambda}\right)\left(z+e^{-i\lambda}\right)}$，取与上小题同样的积分路径，规定

$0 \le \arg \le 2\pi$，则 $\operatorname{res} f\left[e^{i(\pi+\lambda)}\right] = \lim\limits_{z \to e^{i(\pi+\lambda)}} \dfrac{z^{-p}}{z+e^{-i\lambda}} = -\dfrac{e^{-ip(\pi+\lambda)}}{2i\sin\lambda}$，

$\operatorname{res} f\left[e^{i(\pi-\lambda)}\right] = \lim\limits_{z \to e^{i(\pi-\lambda)}} \dfrac{z^{-p}}{z+e^{i\lambda}} = \dfrac{e^{-ip(\pi-\lambda)}}{2i\sin\lambda}$。所以

$$\left(1-e^{-2ip\pi}\right)\int_\delta^R \frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}dx + \left(\int_{C_\delta} + \int_{C_R}\right)f(z)dz = 2\pi i e^{-ip\pi}\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda} 。$$

令上式 $\delta \to 0, R \to \infty$，由于 $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \lim\limits_{z \to \infty} z \cdot \dfrac{z^{-p}}{z^2 + 2z\cos\lambda + 1} = 0$，

$\lim\limits_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z)dz = -2\pi i \lim\limits_{z \to 0} z \cdot \dfrac{z^{-p}}{z^2 + 2z\cos\lambda + 1} = 0$，所以

$$\int_0^\infty \frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}dx = 2\pi i e^{-ip\pi}\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda\left(1-e^{-2ip\pi}\right)} = \frac{\pi\sin p\lambda}{\sin p\pi \sin\lambda} 。$$

（3）令 $f(z) = \dfrac{z^{a-1}}{1-z}$，取如下积分路径，规定 $0 \le \arg \le 2\pi$。
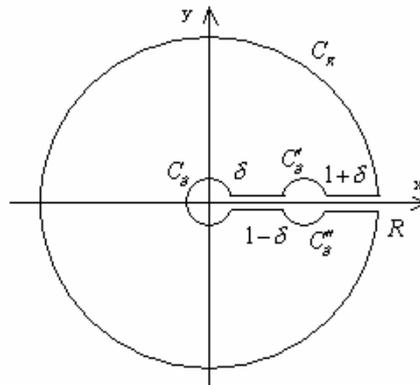
$$\left(1-e^{2ia\pi}\right)\left(\int_{\delta}^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{R}\right)f(x)dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}+\int_{C'_\delta}+\int_{C''_\delta}\right)f(z)dz=0,$$

令上式 $\delta\to0,R\to\infty$，因为 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$，$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$，

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C'_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to1}(z-1)\frac{z^{a-1}}{1-z}=\pi i,$$

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C''_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to e^{2i\pi}}(z-1)\frac{z^{a-1}}{1-z}=\pi ie^{2ia\pi},$$

所以原积分 $=\pi i\dfrac{e^{2ia\pi}+1}{e^{2ia\pi}-1}=\pi\cot(a\pi)$。

（4）令 $f(z)=\dfrac{(\ln z)^2}{\sqrt{z}\left(z^2+a^2\right)^2}$，取与第（1）小题相同的积分路径，规定 $0\le\arg\le2\pi$，

则 $\operatorname{res}f(ai)=\lim\limits_{z\to ai}\dfrac{d}{dz}\dfrac{(\ln z)^2}{\sqrt{z}(z+ai)^2}=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi/2}}\dfrac{4(z+ai)\ln z-(5z+ai)(\ln z)^2}{2z^{3/2}(z+ai)^3}$

$$=\frac{4\ln a-3(\ln a)^2+\dfrac{3}{4}\pi^2-2\pi+3\pi\ln a+i\left[4\ln a-3(\ln a)^2+\dfrac{3}{4}\pi^2+2\pi-3\pi\ln a\right]}{8\sqrt{2}a^{7/2}},$$

$\operatorname{res}f(-ai)=\lim\limits_{z\to-ai}\dfrac{d}{dz}\dfrac{(\ln z)^2}{\sqrt{z}(z-ai)^2}=\lim\limits_{z\to ae^{i3\pi/2}}\dfrac{4(z-ai)\ln z-(5z-ai)(\ln z)^2}{2z^{3/2}(z-ai)^3}$

$$=\frac{-4\ln a+3(\ln a)^2-\dfrac{27}{4}\pi^2-6\pi+9\pi\ln a+i\left[4\ln a-3(\ln a)^2+\dfrac{27}{4}\pi^2-6\pi+9\pi\ln a\right]}{8\sqrt{2}a^{7/2}}。$$

围道积分为：

$$\int_{\delta}^{R}\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx+\int_{R}^{\delta}\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{-\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=2\pi i\left[\operatorname{res}f(ai)+\operatorname{res}f(-ai)\right]$$

令 $\delta\to0,R\to\infty$，由于 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$，$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$，所以

$$\int_0^\infty\frac{2(\ln x)^2-4\pi^2}{\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx+4\pi i\int_0^\infty\frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx=2\pi i\left[\operatorname{res}f(ai)+\operatorname{res}f(-ai)\right],$$

因此原积分 $=\dfrac{1}{4\pi}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res}f(ai)+\operatorname{res}f(-ai)\right]\right\}=\dfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\operatorname{res}f(ai)+\operatorname{res}f(-ai)\right]$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}a^{7/2}}\left(\frac{3}{2}\ln a - 1 - \frac{3\pi}{4}\right)。$$

143. 设 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 分别为 m 阶及 n 阶多项式，并且 $m \le n-2$，且 $Q(z)$ 无非负实根。

考虑函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z$ 的积分，证明 $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx = -\sum_{\text{全平面}} \text{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$，$0 \le \arg z \le 2\pi$。

证：令 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\ln z$，取与上题第（1）小题相同的积分路径，规定 $0 \le \arg z \le 2\pi$，

有 $\int_\delta^R \frac{P(x)}{Q(x)}\ln x\, dx + \int_R^\delta \frac{P(x)}{Q(x)}(\ln x + 2\pi i)dx + \left(\int_{C_R} + \int_{C_\delta}\right)f(z)dz = 2\pi i\sum_{\text{全平面}} \text{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$，

即 $\int_\delta^R \frac{P(x)}{Q(x)}dx + \left(\int_{C_R} + \int_{C_\delta}\right)f(z)dz = -\sum_{\text{全平面}} \text{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$。 $\qquad$ （*）

由于 0 不是 $Q(z)$ 的零点，则 $\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z = \frac{P(0)}{Q(0)}\lim_{z\to 0} z\ln z = 0$，所以

$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = 0$。因为 $m \le n-2$，所以 $\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z = \lim_{z\to\infty}\frac{\ln z}{z^{n-m-1}} = 0$，则

$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$。令（*）式 $\delta\to 0, R\to\infty$ 即得 $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx = -\sum_{\text{全平面}} \text{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$。

144. 利用上题结果计算下列积分：（1）$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x+x^2)^2}dx$；（2）$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+a^3}dx$；

（3）$\int_0^\infty \frac{1}{(x+a)(x^2+b^2)}dx$，$a > 0$，$b > 0$；（4）$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$。

（1）令 $f(z) = \frac{z\ln z}{(1+z+z^2)^2}$，$\text{res}\,f(e^{i2\pi/3}) = \lim_{z\to e^{i2\pi/3}}\frac{d}{dz}\frac{z\ln z}{(z-e^{i4\pi/3})^2} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi$，

$\text{res}\,f(e^{i4\pi/3}) = \lim_{z\to e^{i4\pi/3}}\frac{d}{dz}\frac{z\ln z}{(z-e^{i2\pi/3})^2} = \frac{4}{9\sqrt{3}}\pi - \frac{1}{3}$。

原积分 $= -\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right) - \operatorname{res} f\left(e^{i4\pi/3}\right) = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi\right)$。

（2）令 $f(z) = \dfrac{\ln z}{z^3 + a^3}$，

$\operatorname{res} f\left(ae^{i\pi/3}\right) = \lim\limits_{z \to ae^{i\pi/3}} \dfrac{\ln z}{(z+a)\left(z - ae^{i5\pi/3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}\pi - 3\ln a - i\left(\pi + 3\sqrt{3}\ln a\right)}{18a^2}$，

$\operatorname{res} f(-a) = \lim\limits_{z \to ae^{i\pi}} \dfrac{\ln z}{z^2 - az + a^2} = \dfrac{\ln a + \pi i}{3a^2}$，

$\operatorname{res} f\left(ae^{i5\pi/3}\right) = \lim\limits_{z \to ae^{i5\pi/3}} \dfrac{\ln z}{(z+a)\left(z - ae^{i2\pi/3}\right)} = \dfrac{-5\sqrt{3}\pi - 3\ln a + i\left(3\sqrt{3}\ln a - 5\pi\right)}{18a^2}$。

原积分 $= -\operatorname{res} f\left(ae^{i\pi/3}\right) - \operatorname{res} f(-a) - \operatorname{res} f\left(ae^{i5\pi/3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9a^2}$。

（3）令 $f(z) = \dfrac{\ln z}{(z+a)\left(z^2 + b^2\right)}$，则 $\operatorname{res} f(-a) = \lim\limits_{z \to ae^{i\pi}} \dfrac{\ln z}{z^2 + b^2} = \dfrac{\ln a + \pi i}{a^2 + b^2}$，

$\operatorname{res} f(bi) = \lim\limits_{z \to be^{i\pi/2}} \dfrac{\ln z}{(z+a)(z+bi)} = \dfrac{a\pi - 2b\ln b - i\left(2a\ln b + b\pi\right)}{4b\left(a^2 + b^2\right)}$，

$\operatorname{res} f(-bi) = \lim\limits_{z \to be^{i3\pi/2}} \dfrac{\ln z}{(z+a)(z-bi)} = \dfrac{-3a\pi - 2b\ln b + i\left(2a\ln b - 3b\pi\right)}{4b\left(a^2 + b^2\right)}$。

原积分 $= -\operatorname{res} f(-a) - \operatorname{res} f(-bi) - \operatorname{res} f(bi) = \dfrac{1}{a^2 + b^2}\left(\ln\dfrac{b}{a} + \dfrac{a\pi}{2b}\right)$。

（4）$f(z) = \dfrac{\ln z}{\left(z^2 + a^2\right)\left(z^2 + b^2\right)}$，则 $\operatorname{res} f(ai) = \lim\limits_{z \to ae^{i\pi/2}} \dfrac{\ln z}{(z+ai)\left(z^2 + b^2\right)} = \dfrac{-\pi + 2i\ln a}{4a\left(a^2 - b^2\right)}$，

$\operatorname{res} f(-ai) = \lim\limits_{z \to ae^{i3\pi/2}} \dfrac{\ln z}{(z-ai)\left(z^2 + b^2\right)} = \dfrac{3\pi - 2i\ln a}{4a\left(a^2 - b^2\right)}$，

$\operatorname{res} f(bi) = \lim\limits_{z \to be^{i\pi/2}} \dfrac{\ln z}{\left(z^2 + a^2\right)(z+bi)} = \dfrac{\pi - 2i\ln b}{4b\left(a^2 - b^2\right)}$，

$\operatorname{res} f(-bi) = \lim\limits_{z \to be^{i3\pi/2}} \dfrac{\ln z}{\left(z^2 + a^2\right)(z-bi)} = \dfrac{-3\pi + 2i\ln b}{4b\left(a^2 - b^2\right)}$。

原积分 $= -\operatorname{res} f(ai) - \operatorname{res} f(-ai) - \operatorname{res} f(bi) - \operatorname{res} f(-bi) = \dfrac{\pi}{2ab(a+b)}$。

145. 用类似于 143 题的方法证明 $\int_0^\infty f(x)\ln x\,dx = -\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{f(z)(\ln z)^2\right\}$，

$\int_0^\infty f(x)\,dx = -\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{f(z)(\ln z)^2\right\}$，$0\le \arg z \le 2\pi$。其中 $f(x)$ 满足和第 143

题中 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 同样的要求。

证：令 $F(z)=f(z)(\ln z)^2$，取与 143 题相同的积分路径，规定 $0\le \arg z < 2\pi$，同样有

$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}F(z)\,dz = 0$，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)\,dz = 0$。围线积分为

$\int_\delta^R f(x)(\ln x)^2\,dx + \int_R^\delta f(x)(\ln x + 2\pi i)^2\,dx + \left(\int_{C_\delta} + \int_{C_R}\right)F(z)\,dz = 2\pi i\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{F(z)\right\}$，

即 $4\pi^2\int_\delta^R f(x)\,dx - 4\pi i\int_\delta^R f(x)\ln x\,dx + \left(\int_{C_\delta} + \int_{C_R}\right)F(z)\,dz = 2\pi i\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{F(z)\right\}$。

令上式 $\delta\to 0, R\to\infty$ 得 $\pi\int_0^\infty f(x)\,dx - i\int_0^\infty f(x)\ln x\,dx = \dfrac{1}{2}i\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{f(z)(\ln z)^2\right\}$，

比较两边实部和虚部即得证。

146. 利用上题结论计算下列积分：（1）$\int_0^\infty \dfrac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$，$a>0$；（2）$\int_0^\infty \dfrac{\ln x}{(x+a)(x+b)}\,dx$，

$b>a>0$；（3）$\int_0^\infty \dfrac{\ln x}{(x+a)^2}\,dx$，$a>0$；（4）$\int_0^\infty \dfrac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}\,dx$，$a,b$ 均为正数。

（1）令 $f(z)=\dfrac{(\ln z)^2}{z^2+a^2}$，则 $\mathrm{res}\,f(ai)=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi/2}}\dfrac{(\ln z)^2}{z+ai}=\dfrac{\pi\ln a}{2a}+i\dfrac{\pi^2-4\ln^2 a}{8a}$，

$\mathrm{res}\,f(-ai)=\lim\limits_{z\to ae^{i3\pi/2}}\dfrac{(\ln z)^2}{z-ai}=-\dfrac{3\pi\ln a}{2a}+i\dfrac{4\ln^2 a-9\pi^2}{8a}$。

原积分 $=-\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Re}\left[\mathrm{res}\,f(ai)\right]+\mathrm{Re}\left[\mathrm{res}\,f(-ai)\right]\right\}=\dfrac{\pi\ln a}{2a}$。

（2）令 $f(z)=\dfrac{(\ln z)^2}{(z+a)(z+b)}$，则 $f(-a)=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi}}\dfrac{(\ln z)^2}{z+b}=\dfrac{\ln^2 a-\pi^2}{b-a}+i\dfrac{2\pi\ln a}{b-a}$，

$f(-b)=\lim\limits_{z\to be^{i\pi}}\dfrac{(\ln z)^2}{z+a}=\dfrac{\pi^2-\ln^2 b}{b-a}-i\dfrac{2\pi\ln b}{b-a}$。

原积分 $= -\dfrac{1}{2}\left\{\text{Re}\left[\text{res}\,f(-a)\right]+\text{Re}\left[\text{res}\,f(-b)\right]\right\} = \dfrac{\ln^2 b - \ln^2 a}{2(b-a)} = \dfrac{\ln ab \ln\dfrac{b}{a}}{2(b-a)}$ 。

（3）令 $f(z) = \dfrac{(\ln z)^2}{(z+a)^2}$ ，则 $\text{res}\,f(-a) = \lim\limits_{z\to ae^{i\pi}}\dfrac{d}{dz}(\ln z)^2 = -\dfrac{2\ln a}{a} - i\dfrac{2\pi}{a}$ 。

原积分 $= -\dfrac{1}{2}\text{Re}\left[\text{res}\,f(-a)\right] = \dfrac{\ln a}{a}$ 。

（4）令 $f(z) = \dfrac{(\ln z)^2}{(z+a)^2 + b^2}$ ，则 $\text{res}\,f(-a+bi) = \lim\limits_{z\to\sqrt{a^2+b^2}\,e^{i\left(\pi-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}}\dfrac{(\ln z)^2}{z+a+bi}$

$= \dfrac{1}{2b}\left(\pi - \tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right)\ln\left(a^2+b^2\right) + i\dfrac{1}{2b}\left[\left(\pi - \tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\ln^2\left(a^2+b^2\right)\right]$ ，

$\text{res}\,f(-a-bi) = \lim\limits_{z\to\sqrt{a^2+b^2}\,e^{i\left(\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}}\dfrac{(\ln z)^2}{z+a-bi}$

$= -\dfrac{1}{2b}\left(\pi + \tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right)\ln\left(a^2+b^2\right) + i\dfrac{1}{2b}\left[\dfrac{1}{4}\ln^2\left(a^2+b^2\right) - \left(\pi + \tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right)^2\right]$ 。

原积分 $= -\dfrac{1}{2}\left\{\text{Re}\left[\text{res}\,f(-a+bi)\right]+\text{Re}\left[\text{res}\,f(-a-bi)\right]\right\} = \dfrac{1}{2b}\tan^{-1}\dfrac{b}{a}\ln\left(a^2+b^2\right)$ 。

147．按照指定的积分围道，考虑适当的复变积分，计算下列定积分：

（1）$\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\left(1+x^2\right)\cos ax}{1+x^2+x^4}dx$ ，$\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{x\sin ax}{1+x^2+x^4}dx$ ，$a>0$；（2）$\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos x - e^x}{x}dx$ ；（3）$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \dfrac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ ，

$0<a<1$；（4）$\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx$ 。
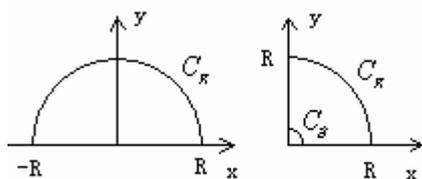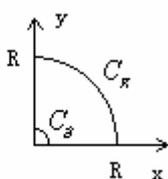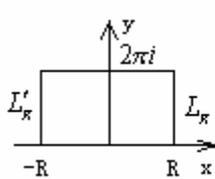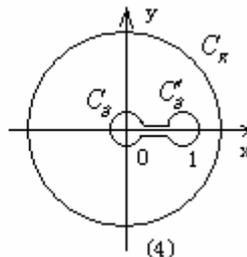
(1) (2) (3) (4)

（1）　令 $f(z) = \dfrac{\left(1+z^2\right)e^{iaz}}{1+z^2+z^4} = $ ，则

$$\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right) = \lim_{z \to e^{i\pi/3}} \frac{\left(1+z^2\right)e^{iaz}}{\left(z-e^{-i\pi/3}\right)\left(z^2+z+1\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(-\sin\frac{a}{2}+i\cos\frac{a}{2}\right),$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right) = \lim_{z \to e^{i2\pi/3}} \frac{\left(1+z^2\right)e^{iaz}}{\left(z^2-z+1\right)\left(z-e^{-i2\pi/3}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\sin\frac{a}{2}+i\cos\frac{a}{2}\right),$$

对围道积分取 $R \to \infty$ 得

$$\int_0^\infty \frac{\left(1+x^2\right)\cos ax}{1+x^2+x^4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)\right]\right\}$$

$$= -\pi\operatorname{Im}\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\cos\frac{a}{2}\text{。}$$

令 $f(z) = \dfrac{ze^{iaz}}{1+z^2+z^4}$，则

$$\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right) = \lim_{z \to e^{i\pi/3}} \frac{ze^{iaz}}{\left(z-e^{-i\pi/3}\right)\left(z^2+z+1\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\sin\frac{a}{2}-i\cos\frac{a}{2}\right),$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right) = \lim_{z \to e^{i2\pi/3}} \frac{ze^{iaz}}{\left(z^2-z+1\right)\left(z-e^{-i2\pi/3}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\sin\frac{a}{2}+i\cos\frac{a}{2}\right)$$

对围道积分取 $R \to \infty$ 得

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2+x^4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)\right]\right\}$$

$$= \pi\operatorname{Re}\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sin\frac{a}{2}\text{。}$$

（2） 令 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$，则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$（由 Jordan 引理的证明过程可看出对于上半

平面张角小于 π 的弧该定理仍成立），$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta} f(z)dz = -\dfrac{\pi i}{2}\lim\limits_{z\to0}e^{iz} = -\dfrac{\pi i}{2}$，围道积分为：

$$\int_\delta^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_R^\delta \frac{e^{-y}}{y}dy + \left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz = 0,\ \ \text{令}\ \delta\to0, R\to\infty\ \text{得}\ \int_0^\infty \frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx = \frac{\pi i}{2},$$

两边取实部即可得 $\int_0^\infty \dfrac{\cos x - e^x}{x}dx = 0$。

（3） 令 $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$，则 $\operatorname{res} f(\pi i) = \lim\limits_{z\to\pi i}\dfrac{e^{az}}{\left(1+e^z\right)'} = -e^{ia\pi}$。类似于 141 题第（6）

小题作法可证 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz = 0$ 和 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{L_R'} f(z)dz = 0$（也可证 $\int_{-\infty}^\infty \dfrac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ 收敛）。

围道积分为 $\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx+e^{2ia\pi}\int_{R}^{-R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx+\left(\int_{L_R}+\int_{L_R'}\right)f(z)dz=-2\pi ie^{ia\pi}$ 。

令 $R\to\infty$ 可得 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx=\frac{-2\pi ie^{ia\pi}}{1-e^{2ia\pi}}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$ 。

（4）令 $\displaystyle f(z)=\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^{3}}}{(1+z)^{3}}$ ，规定割线上岸 $\arg z=0,\arg(1-z)=0$ ，则割线上岸的积分

为 $\displaystyle\int_{\delta}^{1-\delta}\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^{3}}}{(1+x)^{3}}dx$ ，割线下岸积分为 $\displaystyle\int_{1-\delta}^{\delta}\frac{\sqrt[4]{x\left[(1-x)e^{-2i\pi}\right]^{3}}}{(1+x)^{3}}dx=-i\int_{\delta}^{1-\delta}\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^{3}}}{(1+x)^{3}}dx$ 。

由于 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z\sqrt[4]{z(1-z)^{3}}}{(1+z)^{3}}=0$ 与幅角无关，所以 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$ 。

$\displaystyle\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=-2\pi i\lim_{z\to0}\frac{z\sqrt[4]{z(1-z)^{3}}}{(1+z)^{3}}=0$ （与幅角无关），

$\displaystyle\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta'}f(z)dz=-2\pi i\lim_{z\to1}\frac{(z-1)\sqrt[4]{z(1-z)^{3}}}{(1+z)^{3}}=0$ （与幅角无关），

$\displaystyle\operatorname{res}f(-1)=\frac{1}{2}\lim_{\substack{z\to e^{i\pi}\\1-z\to2}}\frac{d^{2}}{dz^{2}}\left[z^{1/4}(1-z)^{3/4}\right]$

$\displaystyle\qquad=-\frac{3}{32}\lim_{\substack{z\to e^{i\pi}\\1-z\to2}}\left[z^{-7/4}(1-z)^{3/4}+2z^{-3/4}(1-z)^{-1/4}+z^{1/4}(1-z)^{-5/4}\right]=-\frac{3}{64}2^{-1/4}e^{i\pi/4}$ 。

围道积分为

$$(1-i)\int_{\delta}^{1-\delta}\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^{3}}}{(1+x)^{3}}dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}+\int_{C_\delta'}\right)f(z)dz=2\pi i\operatorname{res}f(-1)=-i\frac{3}{64}2^{3/4}\pi e^{i\pi/4},$$

令 $\delta\to0,R\to\infty$ 得 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^{3}}}{(1+x)^{3}}dx=-i\frac{3}{64}2^{3/4}\pi\frac{e^{i\pi/4}}{1-i}=\frac{3}{64}2^{1/4}\pi$ 。

148．按照指定的被积函数，选择适当的积分围道，计算下列积分：

（1） $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{a-ib\cos\varphi}d\varphi$ ， $a>0,b>0$ ，被积函数为 $\displaystyle\frac{z^{n}}{bz^{2}+2iaz+b}$ ；

（2） $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^{b}}{1+x^{2}}\cos\left(ax-\frac{1}{2}bx\right)dx$ ， $a\ge0,-1<b<1$ ，被积函数为 $\displaystyle\frac{e^{iaz}z^{b}}{1+z^{2}}$ ；

（3）$\int_0^\infty \dfrac{dx}{x\left[(\ln x)^2 + \pi^2\right]}$，被积函数为 $\dfrac{1}{z\ln z}$；

（4）$\int_0^\infty \dfrac{x\tan^{-1} x}{\left(1+2x^2\right)^2}dx$，被积函数为 $\dfrac{z\ln(1-iz)}{\left(1+2z^2\right)^2}$；

（5）$\int_0^\infty \dfrac{\cos(\ln x)}{1+x^2}dx$，被积函数为 $\dfrac{z^i}{z^2-1}$；

（6）$\int_0^{\pi/2} \dfrac{r\sin 2\theta}{1-2r\cos 2\theta + r^2}\theta d\theta$，被积函数为 $\dfrac{2zr}{z^2(1+r)^2 + (1-r)^2}\dfrac{\ln(1-iz)}{1+z^2}$。

（1）$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^n}{bz^2+2iaz+b}dz = i\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}}{be^{2i\varphi}+2iae^{i\varphi}+b}e^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{be^{i\varphi}+2ia+be^{-i\varphi}}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{a-ib\cos\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{a-ib\cos\varphi} + \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{a-ib\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{a-ib\cos\varphi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{e^{-in\theta}d\theta}{a-ib\cos\theta} \quad \text{（作代换 } \theta = 2\pi - \varphi\text{）}$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{a-ib\cos\varphi}d\varphi$$

记 $f(z) = \dfrac{z^n}{bz^2+2iaz+b} = \dfrac{z^n}{b(z-z_1)(z-z_2)}$，其中 $z_1 = \left(\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}+1} - \dfrac{a}{b}\right)i$，

$z_2 = -\left(\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}+1} + \dfrac{a}{b}\right)i$，显然 z_1 在单位圆内，z_2 在单位圆外。

$$\operatorname{res} f(z_1) = \lim_{z\to z_1}\frac{z^n}{b(z-z_2)} = \frac{i^n\left(\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}+1} - \dfrac{a}{b}\right)^n}{2bi\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}+1}} = \frac{1}{2i\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{i}{b}\right)^n\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^n,$$

原积分 $= 2\pi i\operatorname{res} f(z_1) = \dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\dfrac{i}{b}\right)^n\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^n$。

（2）令 $f(z) = \dfrac{e^{iaz}z^b}{1+z^2}$，规定 $0 \le \arg z \le 2\pi$，则 $\operatorname{res} f(i) = \lim_{z\to e^{i\pi/2}}\dfrac{e^{iaz}z^b}{z+i} = \dfrac{e^{-a}}{2i}e^{i\frac{b}{2}\pi}$，

$\operatorname{res} f(-i) = \lim_{z\to e^{i3\pi/2}}\dfrac{e^{iaz}z^b}{z-i} = -\dfrac{e^{a}}{2i}e^{i\frac{3b}{2}\pi}$。取如下积分路径：
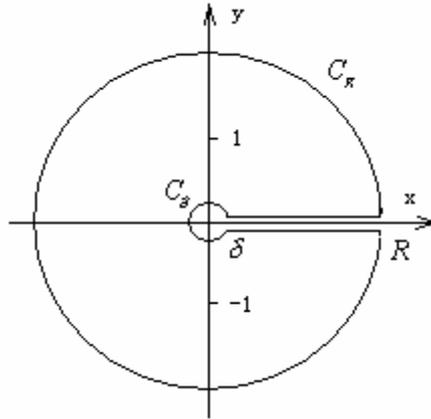
易得 $\int_0^{\infty} \dfrac{x^b e^{iax}}{1+x^2} dx = \dfrac{2\pi i}{\left(1-e^{2ib\pi}\right)} \left[\operatorname{res} f(i) + \operatorname{res} f(-i)\right] = -i\pi \dfrac{\operatorname{sh}\left(a+i\dfrac{b}{2}\pi\right)}{\sin b\pi}$

$$= \pi\left(\dfrac{\operatorname{ch} a}{2\cos\dfrac{b\pi}{2}} - i\dfrac{\operatorname{sh} a}{2\sin\dfrac{b\pi}{2}}\right) 。$$

所以 $\int_0^{\infty} \dfrac{x^b \cos ax}{1+x^2} dx = \pi \dfrac{\operatorname{ch} a}{2\cos\dfrac{b\pi}{2}}$ ， $\int_0^{\infty} \dfrac{x^b \sin ax}{1+x^2} dx = -\pi \dfrac{\operatorname{sh} a}{2\sin\dfrac{b\pi}{2}}$ 。

原积分 $= \cos\dfrac{b\pi}{2} \int_0^{\infty} \dfrac{x^b \cos ax}{1+x^2} dx + \sin\dfrac{b\pi}{2} \int_0^{\infty} \dfrac{x^b \sin ax}{1+x^2} dx = \dfrac{\pi}{2}(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a) = \dfrac{\pi}{2} e^{-a}$ 。

（3）令 $f(z) = \dfrac{1}{z\ln z}$ ，规定 $-\pi \le \arg z \le \pi$ ， $\operatorname{res} f(1) = \lim\limits_{z\to e^{i0}} \dfrac{1}{z(\ln z)'} = 1$ 。积分路径如

下：
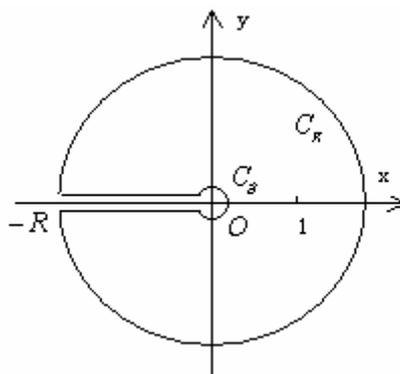
$\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 2\pi i \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{\ln z} = 0$ ，

$\lim\limits_{\delta\to 0} \int_{C_\delta} f(z)dz = -2\pi i \lim\limits_{z\to 0} zf(z) = -2\pi i \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{\ln z} = 0$ ，

割线上岸有 $z = re^{i\pi}$ ，积分为 $\int_R^\delta \dfrac{1}{re^{i\pi}\left(\ln r + \pi i\right)}d\left(re^{i\pi}\right) = -\int_\delta^R \dfrac{1}{x\left(\ln x + \pi i\right)}dx$ ，同样可得割

线下岸积分为 $\int_\delta^R \dfrac{1}{x\left(\ln x - \pi i\right)}dx$ 。围道积分为：

$$\int_\delta^R \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln x - \pi i} - \frac{1}{\ln x + \pi i}\right)dx + \left(\int_{C_R} + \int_{C_\delta}\right)f(z)dz = 2\pi i 。$$

令 $\delta \to 0, R \to \infty$ 得 $2\pi i \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{dx}{x\left[\left(\ln x\right)^2 + \pi^2\right]} = 2\pi i$ ，即 $\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{dx}{x\left[\left(\ln x\right)^2 + \pi^2\right]} = 1$ 。

（4）令 $f(z) = \dfrac{z\ln(1-iz)}{4\left(z^2 + \dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{z\ln(1-iz)}{4\left(z + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2\left(z - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2}$ 。

$$\operatorname{res} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \lim_{z \to \frac{1}{\sqrt{2}}i} \frac{d}{dz} \frac{z\ln(1-iz)}{4\left(z + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2} = \lim_{z \to \frac{1}{\sqrt{2}}i} \frac{\left[\ln(1-iz) - \dfrac{iz}{1-iz}\right]\left(z + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) - 2z\ln(1-iz)}{4\left(z + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^3}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\sqrt{2} - 1\right) 。$$

$-i$ 和 ∞ 是 $f(z)$ 的枝点，可沿虚轴从 $-i$ 向下延伸到 ∞ 作为割线，取如下积分路径（在单值
分枝内）：
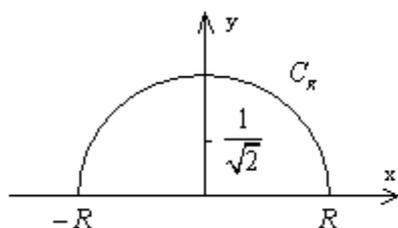
$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)dz = \pi i \lim_{z \to \infty} \frac{z^2 \ln(1-iz)}{\left(1 + 2z^2\right)^2} = 0 。 \text{围道积分为：}$$

$$\int_{-R}^0 \frac{x\ln(1-ix)}{\left(1 + 2x^2\right)^2}dx + \int_0^R \frac{x\ln(1-ix)}{\left(1 + 2x^2\right)^2}dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -i\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2} - 1\right) 。$$

由于 $\displaystyle\int_{-R}^0 \frac{x\ln(1-ix)}{\left(1 + 2x^2\right)^2}dx = \int_R^0 \frac{y\ln(1+iy)}{\left(1 + 2y^2\right)^2}dy = -\int_0^R \frac{x\ln(1+ix)}{\left(1 + 2x^2\right)^2}dx$ ，

所以 $\int_{-R}^{0}\dfrac{x\ln(1-ix)}{\left(1+2x^2\right)^2}dx+\int_{0}^{R}\dfrac{x\ln(1-ix)}{\left(1+2x^2\right)^2}dx=\int_{0}^{R}\dfrac{x\ln\left(\dfrac{1-ix}{1+ix}\right)}{\left(1+2x^2\right)^2}dx=-2i\int_{0}^{R}\dfrac{x\tan^{-1}x}{\left(1+2x^2\right)^2}dx$。

令围道积分 $R\to\infty$ 得 $-2i\int_{0}^{\infty}\dfrac{x\tan^{-1}x}{\left(1+2x^2\right)^2}dx=-i\dfrac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$，

即 $\int_{0}^{\infty}\dfrac{x\tan^{-1}x}{\left(1+2x^2\right)^2}dx=\dfrac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$。

（5）令 $f(z)=\dfrac{z^i}{z^2-1}=\dfrac{e^{i\ln z}}{z^2-1}$，0 和 ∞ 是其枝点，以负实轴作为割线，规定

$-\pi<\arg z\le\pi$，则 $\operatorname{res}f(1)=\lim\limits_{z\to e^{i0}}\dfrac{e^{i\ln z}}{z+1}=\dfrac{1}{2}$。可取如下积分路径：
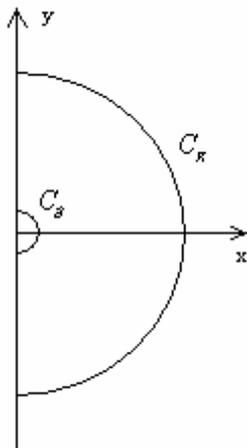
正虚轴上有 $z=re^{i\pi/2}$，积分为 $\int_{R}^{\delta}\dfrac{e^{i\left(\ln r+\frac{\pi}{2}i\right)}}{-r^2-1}d\left(re^{i\pi/2}\right)=ie^{-\pi/2}\int_{\delta}^{R}\dfrac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx$，

负虚轴上 $z=re^{-i\pi/2}$ 积分为 $ie^{\pi/2}\int_{\delta}^{R}\dfrac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx$。围道积分为

$$2i\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{2}\int_{\delta}^{R}\dfrac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=2\pi i\operatorname{res}f(1)=\pi i。$$

由于 $zf(z)=\dfrac{e^{(1+i)\ln z}}{z^2-1}=\dfrac{e^{(1+i)(\ln|z|+i\arg z)}}{z^2-1}=\dfrac{e^{(\ln|z|-\arg z)}}{z^2-1}e^{i(\ln|z|+\arg z)}$，$|z|\to0$ 时 $\ln|z|\to-\infty$，

$e^{(\ln|z|-\arg z)}\to0$（与 $\arg z$ 无关），所以 $\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$。

$\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^{1+i}}{z^2-1}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{(1+i)z^i}{2z}=\dfrac{1+i}{2}\lim\limits_{z\to\infty}z^{-1+i}=\dfrac{1+i}{2}\lim\limits_{z\to\infty}e^{(-1+i)(\ln|z|+i\arg z)}$

$$= \frac{1+i}{2} \lim_{z \to \infty} e^{(-\ln|z| - \arg z)} e^{i(\ln|z| - \arg z)} = 0 \quad (\text{与 } \arg z \text{ 无关}),$$

所以 $\lim\limits_{R \to 0} \int_{C_R} f(z) dz = 0$。令围道积分 $\delta \to 0, R \to \infty$ 得 $\int_0^\infty \frac{e^{i\ln x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}}$。

（6）见附录。

149. 变换 $t = \dfrac{bx+a}{x+1}$，即 $x = \dfrac{t-a}{b-t}$，试利用此类变换证明 $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1} g(t) dt = \int_0^\infty x^{m-1} f(x) dx$，

其中 $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} g\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$。假定有关的积分均存在。

证：令 $x = \dfrac{1+t}{1-t}$，则 $t = \dfrac{x-1}{x+1}$，$dt = \dfrac{2}{(x+1)^2} dx$。所以

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1} g(t) dt = \int_0^\infty x^{m-1} g\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \frac{2}{(x+1)^2} dx = \int_0^\infty x^{m-1} f(x) dx \text{。}$$

150. 利用上题结果，计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1} dt$，$0 < m < 2$；

（2）$\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1} \frac{dt}{t^2+1}$，$0 < m < 2$。

（1）原积分 $= 2\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(x+1)^2} dx$。令 $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{(z+1)^2}$，选取如下积分路径：
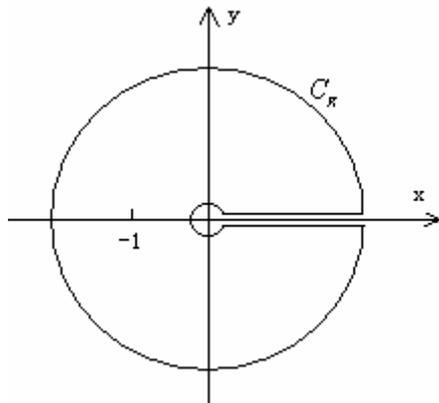
可得原积分 $= \dfrac{2(1-m)\pi}{\sin m\pi}$。

（2）原积分 $= \int_0^\infty \dfrac{x^{m-1}}{x^2+1}dx = \dfrac{\pi}{2\sin\dfrac{m\pi}{2}}$ （取与上小题相同的积分路径）。

151．证明：$\displaystyle\int_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{m-1}h(t)\,dt = \int_0^\infty x^{m-1}f(x)\,dx$，其中 $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)^{2m}h\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$。

并由此计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}\,dt$。

令 $x = \dfrac{1+t}{1-t}$，则 $t = \dfrac{x-1}{x+1}$，

$$\int_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{m-1}h(t)\,dt = \int_0^\infty \left[\dfrac{4x}{(x+1)^2}\right]^{m-1} h\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\dfrac{2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^\infty x^{m-1}f(x)\,dx。$$

$$\int_{-1}^1 \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^\infty \dfrac{x^{1/2}}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \left(\sqrt{2}-1\right)\pi \quad \text{（取与上小题相同的积分路径）。}$$

152．（1）证明：$\displaystyle\int_{-1}^1 \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)g(t)\,dt = \int_0^\infty f(x)\ln x\,dx$，其中 $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}g\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$。

（2）计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)\dfrac{dt}{1-ct}$，$|c| < 1$。

（1）令 $x = \dfrac{1+t}{1-t}$，则 $t = \dfrac{x-1}{x+1}$，

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)g(t)\,dt = \int_0^\infty \ln x\, g\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\dfrac{2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^\infty f(x)\ln x\,dx。$$

（2）$\displaystyle\int_{-1}^1 \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)\dfrac{dt}{1-ct} = \dfrac{2}{1-c}\int_0^\infty \dfrac{\ln x}{(x+1)\left(x+\dfrac{1+c}{1-c}\right)}\,dx$。令 $f(z) = \dfrac{(\ln z)^2}{(z+1)\left(z+\dfrac{1+c}{1-c}\right)}$，取

与上小题相同的积分路径可得原积分 $= \dfrac{1}{2c}\left(\ln\dfrac{1+c}{1-c}\right)^2$。

附录：

148.（6）用原题给的被积函数没做出来：（

取被积函数为 $f(z) = \dfrac{z}{r - e^{-iz}}$ ，积分路径如下图：
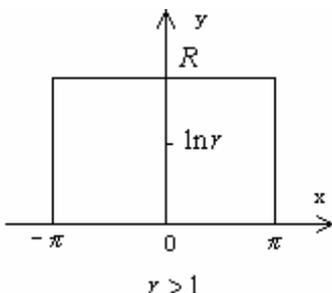
$r > 1$ 时，$i\ln r$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，$\operatorname{res} f(i\ln r) = \lim\limits_{z \to i\ln r} \dfrac{z}{\left(r - e^{-iz}\right)'} = \dfrac{\ln r}{r}$ 。

如上图，底边积分 $= \displaystyle\int_{-\pi}^{0} \dfrac{x}{r - e^{-ix}} dx + \int_{0}^{\pi} \dfrac{x}{r - e^{-ix}} dx = \int_{\pi}^{0} \dfrac{x}{r - e^{ix}} dx + \int_{0}^{\pi} \dfrac{x}{r - e^{-ix}} dx$

$\qquad = -2i \displaystyle\int_{0}^{\pi} \dfrac{x \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} dx$ 。

顶边积分 $= \displaystyle\int_{\pi}^{-\pi} \dfrac{x + iR}{r - e^{-i(x+iR)}} dx = \int_{\pi}^{-\pi} \dfrac{x}{r - e^{R} e^{-ix}} dx + \int_{\pi}^{-\pi} \dfrac{iR}{r - e^{R} e^{-ix}} dx$ 。

由于 $\left| \displaystyle\int_{\pi}^{-\pi} \dfrac{x}{r - e^{R} e^{-ix}} dx \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{|x|}{\sqrt{r^2 - 2re^{R}\cos\theta + e^{2R}}} dx \le \dfrac{2}{e^{R} - r} \int_{0}^{\pi} x\, dx = \dfrac{\pi^2}{e^{R} - r}$ ，

$\left| \displaystyle\int_{\pi}^{-\pi} \dfrac{iR}{r - e^{R} e^{-ix}} dx \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{R}{e^{R} - r} dx = \dfrac{2\pi R}{e^{R} - r}$ ，所以顶边积分 $\to 0$ （$R \to \infty$）。

左边积分+右边积分 $= i \displaystyle\int_{R}^{0} \dfrac{-\pi + iy}{r - e^{-i(-\pi + iy)}} dy + i \int_{0}^{R} \dfrac{\pi + iy}{r - e^{-i(\pi + iy)}} dy = 2\pi i \int_{0}^{R} \dfrac{1}{r + e^{y}} dy$

$\qquad = 2\pi i \displaystyle\int_{0}^{R} \dfrac{e^{-y}}{1 + r e^{-y}} dy = -\dfrac{2\pi i}{r} \ln\left| 1 + r e^{-y} \right|\Big|_{0}^{R} = \dfrac{2\pi i}{r} \left[\ln(1 + r) - \ln\left(1 + r e^{-R}\right) \right]$ 。

当 $R \to \infty$ 时，该积分 $\to \dfrac{2\pi i}{r} \ln(1 + r)$ 。

所以 $R \to \infty$ 时围道积分 $= -2i \displaystyle\int_{0}^{\pi} \dfrac{x \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} dx + \dfrac{2\pi i}{r} \ln(1 + r)$

$\qquad = 2\pi i \operatorname{res} f(i\ln r) = 2\pi i \dfrac{\ln r}{r}$ ，

所以 $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \dfrac{x \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} dx = \dfrac{\pi}{r} \ln\left(1 + \dfrac{1}{r}\right)$ ，即

$\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \dfrac{r \sin 2\theta}{1 - 2r\cos 2\theta + r^2} \theta\, d\theta = \dfrac{r}{4} \int_{0}^{\pi} \dfrac{x \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} dx = \dfrac{\pi}{4} \ln\left(1 + \dfrac{1}{r}\right)$ 。
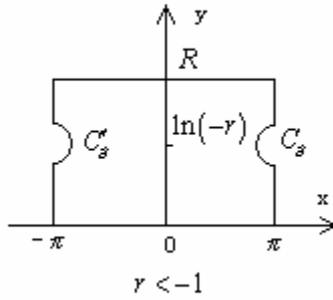
$r < -1$ 时， $\pm\pi + i\ln(-r)$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，如上图，

$$\lim_{\delta \to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = -\pi i \lim_{z \to \pi + i\ln(-r)}\left[z - \pi - i\ln(-r)\right]f(z) = -\pi i \frac{\ln(-r)}{r} - \frac{\pi^2}{r},$$

$$\lim_{\delta \to 0}\int_{C'_\delta} f(z)dz = -\pi i \lim_{z \to -\pi + i\ln(-r)}\left[z + \pi - i\ln(-r)\right]f(z) = -\pi i \frac{\ln(-r)}{r} + \frac{\pi^2}{r}.$$

左边积分+右边积分

$$= -\frac{2\pi i}{r}\ln\left|1 + re^{-y}\right|\Big|_0^R = \frac{2\pi i}{r}\left[\ln(-1-r) - \ln\left|1 + re^{-R}\right|\right] \to \frac{2\pi i}{r}\ln(-1-r) \quad (R \to \infty)。$$

围道积分 $= -2i\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}dx + \frac{2\pi i}{r}\ln(-1-r) - 2\pi i\frac{\ln(-r)}{r} = 0$，即

$$\int_0^{\pi/2} \frac{r\sin 2\theta}{1 - 2r\cos 2\theta + r^2}\theta d\theta = \frac{r}{4}\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}dx = \frac{\pi}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{r}\right)。$$

$-1 < r < 1$ 时，极点位于下半平面，所以围道积分为

$-2i\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}dx + \frac{2\pi i}{r}\ln(1 + r) = 0$，即 $\int_0^{\pi/2} \frac{r\sin 2\theta}{1 - 2r\cos 2\theta + r^2}\theta d\theta = \frac{\pi}{4}(1 + r)$。

153．若函数 $f(z)$ 在右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ 内解析，且满足 $f(z+1) = zf(z)$，$f(1) \neq 0$，证明 $f(z)$ 能够解析延拓到全平面，$z = 0, -1, -2, \cdots$ 除外。

令 $f_1(z) = \dfrac{1}{z} f(z+1)$，他在 $\operatorname{Re} z > -1$ 内解析（除 $z = 0$ 外），由于在 $\operatorname{Re} z > 0$ 内有 $f_1(z) = f(z)$，所以 $f_1(z)$ 就是 $f(z)$ 在 $\operatorname{Re} z > -1$ 内的解析延拓。同样的，令 $f_2(z) = \dfrac{1}{z(z+1)} f(z+2)$，它在 $\operatorname{Re} z > -2$ 内解析（除 $z = 0, -1$ 外），由于在 $\operatorname{Re} z > -1$ 内有 $f_2(z) = \dfrac{1}{z} f(z+1) = f_1(z)$，即它是 $f_1(z)$ 在 $\operatorname{Re} z > -2$ 内的解析延拓。同样的，可得到 $f(z)$ 在全平面上的解析延拓（$z = 0, -1, -2, \cdots$ 除外）。

154．证明 $f_1(z) = 1 + az + a^2 z^2 + \cdots$ 与 $f_2(z) = \dfrac{1}{1-z} - \dfrac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \dfrac{(1-a)^2 z^2}{(1-z)^3} - + \cdots$ 互为解析延拓。

当 $|az| < 1$，即 $|z| < \dfrac{1}{|a|}$ 时，$f_1(z) = \dfrac{1}{1-az}$。

当 $\left| \dfrac{(1-a)z}{1-z} \right| < 1$ 时，$f_2(z) = \dfrac{1}{1-z} \dfrac{1}{1 + \dfrac{(1-a)z}{1-z}} = \dfrac{1}{1-az}$。

将 $\left| \dfrac{(1-a)z}{1-z} \right| < 1$ 化成 $\left(|1-a|^2 - 1\right) z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 < 0$，这是圆内（外）方程（见习题 02 第 47 题），圆心为 $c = -\dfrac{1}{|1-a|^2 - 1}$，半径为 $R = \dfrac{|1-a|}{\left||1-a|^2 - 1\right|}$。

若 $|1-a| > 1$，这是圆内方程，圆心在负实轴，且 $R > |c|$；若 $|1-a| < 1$，这是圆外方程，圆心在正实轴，且 $R < |c|$。

当 $|1-a| = 1$，$\left(|1-a|^2 - 1\right) z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 < 0$ 化为 $x < \dfrac{1}{2}$。

这三种情况 $\left(|1-a|^2 - 1\right) z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 < 0$ 都与 $|z| < \dfrac{1}{|a|}$ 有交集，如下图所示。

在交集上有 $f_1(z) = f_2(z)$，所以两者互为解析延拓。
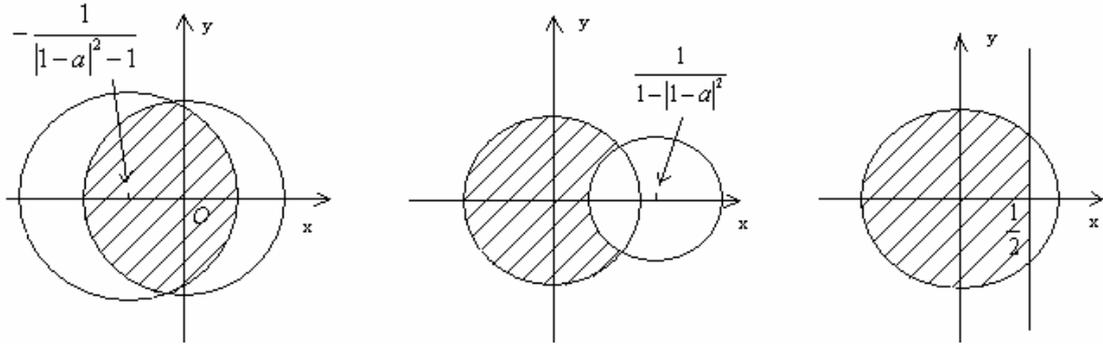
155. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1-z^{n+1}}-\dfrac{1}{1-z^{n}}\right)$ 在区域 $|z|<1$ 与 $|z|>1$ 内分别代表两个解析函数，但不互为解析延拓。

$$S_N(z)=\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{1-z^{n+1}}-\dfrac{1}{1-z^{n}}\right)=-\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1-z^{2}}-\dfrac{1}{1-z^{2}}+\dfrac{1}{1-z^{3}}-\cdots-\dfrac{1}{1-z^{N}}+\dfrac{1}{1-z^{N+1}}$$

$$=\dfrac{1}{1-z^{N+1}}-\dfrac{1}{1-z}\,。$$

$|z|<1$ 时，$S(z)=\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N(z)=1-\dfrac{1}{1-z}=-\dfrac{z}{1-z}$，$|z|>1$ 时，$S(z)=-\dfrac{1}{1-z}$。显然两者不互为解析延拓。

156. 已知：$f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^{n}}=z+z^{2}+z^{4}+z^{8}+\cdots$，$|z|<1$。（1）证明：$z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点；（2）证明：$f(z)=z+f(z^{2})$，因此 $z^{2}=1$ 的根也都是 $f(z)$ 的奇点；（3）类似的证明：$z^{2^{k}}=1$ 的 2^{k} 个根也是 $f(z)$ 的奇点，k 为任意正整数；（4）由此证明：不可能将 $f(z)$ 解析延拓到单位圆外。

（1）$f(1)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}1\to\infty$，即 $z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点。

（2）$f(z^{2})=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{2^{n}}=f(z)-z$。

（3）$f(z)=z+f(z^{2})=z+z^{2}+f(z^{4})$

$$=\cdots=z+z^{2}+z^{4}\cdots+z^{2^{k-1}}+f(z^{2^{k}})$$

（4）对于任意包含单位圆上一段弧的区域，总存在 N，使得 $z^{2^N}=1$ 的某个根落入该区域，所以不可能将 $f(z)$ 解析延拓到单位圆外。

157. 求下列各积分的一致收敛区域：（1）$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\sqrt{1-t}}dt$；（2）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^z}dt$；（3）$\displaystyle\int_0^\infty e^{-zt^2}dt$；

（4）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t}dt$。

（1）$\operatorname{Re}z \geq \delta > 0$ 时，在 $t \in (0,1)$ 上有 $\left|\dfrac{t^{z-1}}{\sqrt{1-t}}\right| \leq \dfrac{1}{t^{1-\delta}(1-t)^{1/2}}$，由于 $1-\delta < 1$，$\dfrac{1}{2} < 1$，所

以 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\delta}(1-t)^{1/2}}$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\sqrt{1-t}}dt$ 在 $\operatorname{Re}z \geq \delta$ 上一致收敛。

（2）原积分 $= \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t^z}dt + \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^z}dt$。

当 $\operatorname{Re}z \leq 2-\delta$（$\delta > 0$）时，在 $t \in (0,1)$ 上有 $\left|\dfrac{\sin t}{t^z}\right| \leq \dfrac{t}{t^{2-\delta}} = \dfrac{1}{t^{1-\delta}}$。由于 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\delta}}dt$ 收敛，

所以 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t^z}dt$ 在 $\operatorname{Re}z \leq 2-\delta$ 上一致收敛。

当 $\operatorname{Re}z \geq \delta > 0$ 时，$\left|\dfrac{1}{t^z}\right| \leq \dfrac{1}{t^\delta}$ 一致单调趋于零，$\left|\displaystyle\int_1^b \sin t\,dt\right| = |\cos 1 - \cos b| \leq 2$，由狄里克莱

判别法可知 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^z}dt$ 一致收敛。所以原积分在 $\delta \leq \operatorname{Re}z \leq 2-\delta$ 上一致收敛。

（3）$\operatorname{Re}z \geq \delta > 0$ 时，$\left|e^{-zt^2}\right| \leq e^{-\delta t^2}$，由于 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\delta t^2}dt$ 收敛，所以原积分一致收敛。

（4）$\operatorname{Re}z \geq \delta > 0$ 时，$\left|e^{-zt}\right| \leq e^{-\delta t}$，所以 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-zt}dt$ 一致收敛，又由于 $\dfrac{1}{1+t}$ 单调有界，由 Abel 判别法可知原积分一致收敛。

158. 证明：（1）$\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx$，$\operatorname{Re}z > 0$；

（2）$\Gamma(z) = \displaystyle\int_L t^{z-1}e^{-t}dt$，$\operatorname{Re}z > 0$，$L$ 是自原点发出的射线，$0 < |t| < \infty$，$|\arg t| < \dfrac{\pi}{2}$；

（3）$\Gamma(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$，$z \neq 0, -1, -2, \cdots$。

（1）作代换 $\ln\dfrac{1}{x}=t$，即 $x=e^{-t}$，则 $\displaystyle\int_0^1\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{z-1}dx=-\int_\infty^0 t^{z-1}e^{-t}dt=\Gamma(z)$。

（2）令 $f(t)=t^{z-1}e^{-t}$，在如下的围道上积分：
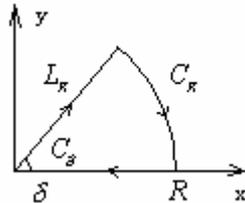
$$\left(\int_L+\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(t)dt-\int_\delta^R f(x)dx=0。$$

由于 $\displaystyle\lim_{t\to0}tf(t)=\lim_{t\to0}t^z e^{-t}=0$（$\operatorname{Re}z>0$），所以 $\displaystyle\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(t)dt=0$，

由于 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}tf(t)=\lim_{t\to\infty}t^z e^{-t}=0$，所以 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(t)dt=0$。

令围道积分 $\delta\to0,R\to\infty$ 既可得 $\displaystyle\int_L e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx=\Gamma(z)$。

（3）$\displaystyle\Gamma(z)=\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=\int_0^1\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}dt+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$

可求得级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}$ 的收敛半径为 ∞，所以上式中积分与求和可交换顺序，即

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt。$$ $\operatorname{Re}z>0$ 时有 $\displaystyle\int_0^1 t^{n+z-1}dt=\frac{1}{n+z}$，即

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt。$$

任取一有界单连通闭区域 $\overline{G}$（排除 $z=0,-1,-2,\cdots$），有

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}\right|=\frac{1}{n!}\frac{1}{\sqrt{(n+x)^2+y^2}}\le\frac{1}{n!|y|}。$$ 由于 $\overline{G}$ 有界且不含原点，必存在 M，使在 $\overline{G}$ 上

有 $\dfrac{1}{|y|}\le M$。由于 $\displaystyle\sum\frac{M}{n!}$ 收敛，所以 $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛，所以在 G 上解析。

由 $\overline{G}$ 的任意性可知该级数在全平面（排除 $z=0,-1,-2,\cdots$）上解析。上式可作为 $\Gamma(z)$ 在全平面上的解析延拓。

159. 将下列连乘积用 Γ 函数表示出来：（1）$(2n)!!$；　（2）$(2n-1)!!$；

（3）$(1+\rho)(2+\rho)\cdots(n+\rho)$；（4）$\left[n(n+1)-\rho(\rho+1)\right]\left[(n-1)n-\rho(\rho+1)\right]\cdots\left[0-\rho(\rho+1)\right]$。

（1）$(2n)!!=(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots2=2^n n(n-1)(n-2)\cdots1=2^n n!=2^n\Gamma(n+1)$。

（2）$(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots1=\dfrac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots2\cdot1}{(2n)!!}$

$$=\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}=\dfrac{\Gamma(2n+1)}{2^n\Gamma(n+1)}。$$

（3）$\Gamma(\rho+n+1)=(\rho+n)\Gamma(\rho+n)=(\rho+n)(\rho+n-1)\Gamma(\rho+n-1)=\cdots$

$$=(\rho+n)(\rho+n-1)\cdots(\rho+1)\Gamma(\rho+1)$$

所以 $(1+\rho)(2+\rho)\cdots(n+\rho)=\dfrac{\Gamma(\rho+n+1)}{\Gamma(\rho+1)}$。

（4）$n(n+1)-\rho(\rho+1)=-\left[\rho^2+\rho-n(n+1)\right]=(\rho+n+1)(n-\rho)$，

原式 $=(\rho+n+1)(\rho+n)\cdots(\rho+1)\cdot(n-\rho)(n-1-\rho)\cdots(-\rho)=\dfrac{\Gamma(\rho+n+2)}{\Gamma(\rho+1)}\dfrac{\Gamma(n+1-\rho)}{\Gamma(-\rho)}$。

160. 设 $\psi(z)=\dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$，证明：（1）$\psi(z+1)=\dfrac{1}{z}+\psi(z)$；

（2）$\psi(z+n)-\psi(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z+1}+\cdots+\dfrac{1}{z+n-1}$；（3）$\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\cot(\pi z)$；

（4）$2\psi(2z)-\psi(z)-\psi\left(z+\dfrac{1}{2}\right)=2\ln2$。

（1）对 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 两边取对数，再微商即可证。

（2）由 $\Gamma(z+n)=(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$ 可证。

（3）由 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ 可得。

（4）由 $\Gamma(2z)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right)$ 可得。

161．证明：$\psi(z)$ 仍以 0 及负整数为其一阶极点，并求其留数。

由上题第（2）小题结论，$\psi(z) = \psi(z+n+1) - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z+1} - \cdots - \dfrac{1}{z+n}$。$\psi(z+n+1)$ 在

$z = -n$ 的足够小邻域内是解析的（因为 $\psi(z+n+1) = \dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z+n+1)$，而 $\Gamma(z+n+1)$ 是

解析的），所以 $z = -n$（$n = 0,1,2,\cdots$）为其一阶极点。

$$\operatorname{res}\psi(-n) = \lim_{z \to -n}(z+n)\psi(z)$$

$$= \lim_{z \to -n}\left[(z+n)\psi(z+n+1) - \frac{(z+n)}{z} - \frac{(z+n)}{z+1} - \cdots - \frac{(z+n)}{z+n-1} - 1\right] = -1$$

162. 定义 $J_\nu(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$，试导出 $Y_n(z) = \displaystyle\lim_{\nu \to n}\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$，

$n = 0,1,2,\cdots$ 的级数表达式。

由于 $z = -n$（$n = 0,1,2,\cdots$）是 $\Gamma(z)$ 的极点，所以有 $\dfrac{1}{\Gamma(-n)} = 0$。由此可导出 $J_n(z)$ 的

一个性质：$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$。

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\,\Gamma(k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

$$= (-1)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(z)。$$

当 $\nu \neq n$ 时，$J_\nu(z)$ 是多值函数，0 和 ∞ 是其枝点，可把负实轴作为割线，规定 $|\arg z| < \pi$。

用 $u_k(z,\nu)$ 表示 $J_\nu(z)$ 级数表达式的通项，当 $|z| \leq M, |\nu| \leq L$（M, L 是任意正数），k 充分

大时，$\left|\dfrac{u_{k+1}(z,\nu)}{u_k(z,\nu)}\right| = \dfrac{1}{(k+1)|k+\nu+1|}\left|\dfrac{z}{2}\right|^2 \leq \dfrac{1}{(k+1)(k+1-L)}\left(\dfrac{M}{2}\right)^2 \to 0$，所以该级数在

给定范围内对于 z 和 ν 是一致收敛的，可对 z 和 ν 逐项微分；$J_\nu(z)$ 是 ν 的整函数，在 z 的

单值分枝内是 z 的解析函数。

由于 $z = -n$ 是 $\Gamma(z)$ 和 $\psi(z)$ 的一阶极点，且 $\operatorname{res}\Gamma(-n) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$，$\operatorname{res}\psi(-n) = -1$，

所以可设 $\Gamma(z) = \dfrac{1}{z+n}\left[\dfrac{(-1)^n}{n!} + a_1(z+n) + a_2(z+n)^2 + \cdots\right]$，

$\psi(z) = \dfrac{1}{z+n}\left[-1 + b_1(z+n) + b_2(z+n)^2 + \cdots\right]$，由此得 $\dfrac{\psi(-n)}{\Gamma(-n)} = (-1)^{n+1}n!$。

$$\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \Gamma'(k+\nu+1)}{k!\,\Gamma^2(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} + \ln\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \psi(k+\nu+1)}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} + J_\nu(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\left.\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \psi(k+n+1)}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} + J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \psi(k-\nu+1)}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu} - J_{-\nu}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\left.\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \psi(k-n+1)}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - J_{-n}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k \psi(k-n+1)}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k \psi(k-n+1)}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - (-1)^n J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$= (-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \psi(k+1)}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} - J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)\right]$$

当 $n=0$ 时，上式右边没有第一项求和。

利用洛比达法则，

$$Y_n(z) = \lim_{\nu\to n}\frac{\dfrac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\cos\nu\pi - \pi J_\nu(z)\sin\nu\pi - \dfrac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}}{\pi\cos\nu\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}$$

$$= \frac{2}{\pi}J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\left[\psi(k+n+1) + \psi(k+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

163. 计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin x\,dx$，$0 < \alpha < 2$，$\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\cos x\,dx$，$0 < \alpha < 1$；

（2）$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)dx$ ， $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)dx$ ， $\alpha>0,|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ 。

（1）令 $f(z)=z^{-\alpha}e^{-z}$ ，规定 $-\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}$ ，在下面左图路径上积分：
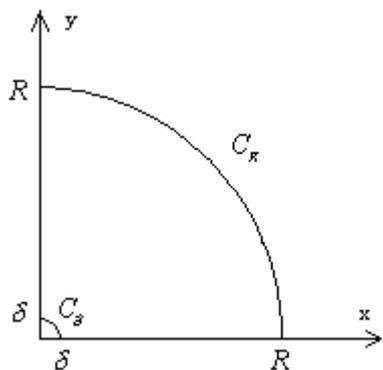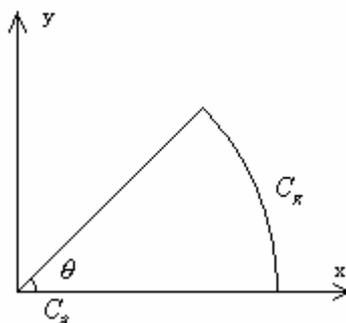
(1)   (2)

$$\int_\delta^R r^{-\alpha}e^{-r}dr+\int_R^\delta \left(re^{i\pi/2}\right)^{-\alpha}e^{-ir}d\left(re^{i\pi/2}\right)+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=0$$

当 $0<\alpha<1$ 时， $0<1-\alpha<1$ ， $\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}z^{1-\alpha}e^{-z}=0$ ，所以 $\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$ 。

又因为 $\operatorname{Re}z>0$ ，所以 $\lim_{z\to\infty}zf(z)=\lim_{z\to\infty}z^{1-\alpha}e^{-z}=0$ ，因此 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$ 。

令围道积分 $\delta\to 0,R\to\infty$ 得 $\int_0^\infty x^{-\alpha}e^{-ix}dx=-ie^{i\frac{\alpha\pi}{2}}\int_0^\infty x^{-\alpha}e^{-x}dx=-ie^{i\frac{\alpha\pi}{2}}\Gamma(1-\alpha)$ 。

取实部和虚部既可得 $0<\alpha<1$ 时有 $\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin xdx=\Gamma(1-\alpha)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$ ，

$\int_0^\infty x^{-\alpha}\cos xdx=\Gamma(1-\alpha)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}$ 。

157 题第（2）小题已证明 $\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin xdx$ 在区间 $\alpha\in[\delta,2-\delta]$ （ $\forall\delta>0$ ）上是一致收敛的，

所以它在 $\alpha\in(\delta,2-\delta)$ 上是 α 的解析函数，由 δ 的任意性，它是 $(0,2)$ 上的解析函数。由

解析延拓原理， $0<\alpha<2$ 时有 $\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin xdx=\Gamma(1-\alpha)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$ 。

（2）取 $f(z)=z^{\alpha-1}e^{-z}$ 在上面右图路径上的积分，

$$\int_\delta^R r^{\alpha-1}e^{-r}dr+\int_R^\delta \left(re^{i\theta}\right)^{\alpha-1}e^{-r(\cos\theta+i\sin\theta)}d\left(re^{i\theta}\right)+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=0$$

由于 $\alpha>0$ ， $\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}z^{\alpha}e^{-z}=0$ ，所以 $\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$ 。

因为 $\operatorname{Re}z>0$ （ $|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ ），所以 $\lim_{z\to\infty}zf(z)=\lim_{z\to\infty}z^{\alpha}e^{-z}=0$ ，因此 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$ 。

令围道积分 $\delta\to 0,R\to\infty$ 得 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}e^{-ix\sin\theta}dx=e^{-i\alpha\theta}\Gamma(\alpha)$

取实部和虚部得 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)dx = \Gamma(\alpha)\cos\alpha\theta$，

$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)dx = \Gamma(\alpha)\sin\alpha\theta$。

164．试用下面的方法导出 $\Gamma(z)$ 的渐近公式：（1）通过变量代换将 $\Gamma(z+1)$ 的积分表达式

改写成 $\Gamma(z+1) = z^z e^{-z} \int_{-z}^\infty \exp\left[z\ln\left(1+\dfrac{s}{z}\right)-s\right]ds$；（2）将上述积分中被积函数的指数作

展开而只保留最主要的一项，并将积分下限近似地换成 $-\infty$，这样就得到 $\Gamma(z+1)$ 在 z 大时

的渐近公式：$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z}\, z^z e^{-z}$。

令 $t = s+z$，则 $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}dt = \int_0^\infty \exp(z\ln t - t)dt = \int_{-z}^\infty \exp(z\ln(s+z)-s-z)ds$

$= e^{z\ln z - z}\int_{-z}^\infty \exp\left[z\ln(s+z)-z\ln z - s\right]ds = z^z e^{-z}\int_{-z}^\infty \exp\left[z\ln\left(1+\dfrac{s}{z}\right)-s\right]ds$。

$\ln\left(1+\dfrac{s}{z}\right) = \dfrac{s}{z} - \dfrac{s^2}{2z^2} + \dfrac{s^3}{3z^3} - +\cdots,\quad z\ln\left(1+\dfrac{s}{z}\right)-s = -\dfrac{s^2}{2z} + \dfrac{s^3}{3z^2} - +\cdots$。

保留第一项 $-\dfrac{s^2}{2z}$，并取积分下限为 $-\infty$，得到 $\Gamma(z+1) \approx z^z e^{-z}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2z}}ds = \sqrt{2\pi z}\, z^z e^{-z}$。

165．证明 $\Gamma(z)$ 的下列积分表示（对一切 z 都成立）：

（1）$\Gamma(z) = \dfrac{1}{e^{2i\pi z}-1}\int_C \zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta$，$C$ 如下面左图所示，规定割线上岸 $\arg\zeta = 0$；

（2）$\dfrac{1}{\Gamma(z)} = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{C'} \zeta^{-z}e^{\zeta}d\zeta$，$C'$ 如下面右图所示，规定割线下岸 $\arg\zeta = -\pi$。
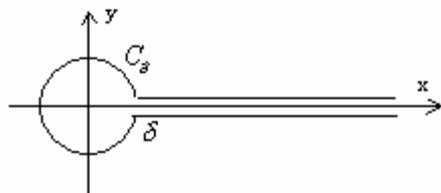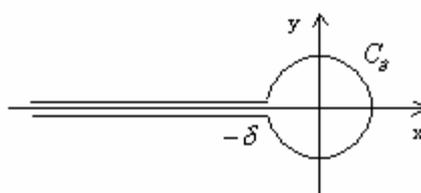
（1）　记 $f(\zeta) = e^{-\zeta}\zeta^{z-1}$，围线积分为：

$$\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta = \int_R^\delta e^{-x}x^{z-1}dx + e^{2i\pi z}\int_\delta^R e^{-x}x^{z-1}dx + \int_{C_\delta} f(\zeta)d\zeta。$$

设 $\operatorname{Re} z > 0$，则 $\lim\limits_{\zeta\to 0}\zeta f(\zeta) = \lim\limits_{\zeta\to 0}e^{-\zeta}\zeta^z = 0$，所以 $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(\zeta)d\zeta = 0$。

令围道积分 $\delta \to 0$ 得 $\Gamma(z) = \dfrac{1}{e^{2i\pi z}-1}\int_C \zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta$。继续可得

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\int_C \zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta = \frac{e^{-i\pi z}}{2i\sin\pi z}\int_C \zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta。$$ 由 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ 可得

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{e^{-i\pi z}}{2\pi i}\int_C \zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta，\quad 即 \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_C \zeta^{-z}e^{-\zeta}d\zeta。$$ 作代换 $\zeta = te^{i\pi}$，则

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} t^{-z}e^t dt。$$

166. 从公式 $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$ 出发，证明：

（1）$\Gamma(z) = \dfrac{1}{z}\prod\limits_{n=1}^\infty\left[\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^z\right]$；（2）$\Gamma(z) = \dfrac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod\limits_{n=1}^\infty\left[\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}\right]$，

其中 $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\ln n + \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{k}\right)$。

（1）作代换 $t = nx$，则 $\int_0^n\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = n^z\int_0^1(1-x)^n x^{z-1}dx = n^z \mathrm{B}(n+1,z)$

$$= n^z \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} = n^z \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$

$$= n^z \frac{1}{z(1+z)\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n-1}\right)\left(1+\dfrac{z}{n}\right)} = n^z \frac{1}{z\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{z}{k}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right)^z\left(\frac{3}{2}\right)^z\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^z \frac{1}{z\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{z}{k}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{z\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}\prod_{k=1}^{n-1}\left[\left(1+\dfrac{z}{k}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^z\right]$$

令 $n \to \infty$ 即得 $\Gamma(z) = \dfrac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^{-1} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{z} \right]$。

（2） $n^z = e^{z\ln n} = \exp\left(z\ln n - z\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \right) \exp\left(z\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \right) = \exp\left[z\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \right) \right] \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{z}{k}}$，

$$\int_0^n \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = n^z \dfrac{1}{z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{z}{k}\right)^{-1} = \dfrac{1}{z} \exp\left[z\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \right) \right] \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \dfrac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}} \right]$$

令 $n \to \infty$ 即得 $\Gamma(z) = \dfrac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \right]$。

167．利用上题结果，证明：（1） $\Gamma(1) = 1$；（2） $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$；

（3） $\psi(z) = -\gamma - \dfrac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+z} \right)$；（4） $\Gamma'(1) = -\gamma$；

（5） $\Gamma'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -(\gamma + 2\ln 2)\sqrt{\pi}$。

（1）令上题第（1）小题中 $z = 1$ 即可得。

（2） $\Gamma(z+1) = \dfrac{1}{z+1} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{z+1}{k}\right)^{-1} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{z+1}$

$= \dfrac{1}{z+1} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k+1+z}{k}\right)^{-1} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{-1} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{z} = \dfrac{1}{z+1} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k+1+z}{k+1}\right)^{-1} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{z}$

$= \dfrac{1}{z+1} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{z}{k+1}\right)^{-1} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{z} = \dfrac{1}{z+1} \lim_{n\to\infty} (1+z) \left(1 + \dfrac{z}{n+1}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{z}{k}\right)^{-1} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{z}$

$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{z}{k}\right)^{-1} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^{z} = z\Gamma(z)$。

（3） $\Gamma(z) = \dfrac{1}{z} e^{-\gamma z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \dfrac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}} \right]$，

$$\ln\Gamma(z) = -\ln z - \gamma z + \lim_{n\to\infty} \ln \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \dfrac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}} \right] = -\ln z - \gamma z + \lim_{n\to\infty} \left[-\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{z}{k}\right) + z\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \right]$$

$$\psi(z) = \dfrac{d}{dz} \ln\Gamma(z) = -\gamma - \dfrac{1}{z} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+z} \right) = -\gamma - \dfrac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+z} \right)。$$

（4）$\psi(1)=-\gamma-1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=-\gamma-1+\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=-\gamma$，

$\Gamma'(1)=\psi(1)\Gamma(1)=-\gamma$。

（5）$\psi\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\gamma-2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1/2}\right)=-\gamma-2\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+1}\right)\right]$

$\qquad\qquad =-\gamma-2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=-\gamma-2\ln 2$，

$\Gamma'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\psi\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=-(\gamma+2\ln 2)\sqrt{\pi}$。

168．试证 B 函数的下列性质：（1）$\mathrm{B}(p,q+1)=\dfrac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$；

（2）$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1)$；（3）$p\mathrm{B}(p,q+1)=q\mathrm{B}(p+1,q)$；

（4）$\mathrm{B}(p,q)\mathrm{B}(p+q,r)=\mathrm{B}(q,r)\mathrm{B}(q+r,p)$；

（5）$\mathrm{B}(p,q)=\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$，$\operatorname{Re}p>0$，$\operatorname{Re}q>0$。

（1）$\mathrm{B}(p,q+1)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}=\dfrac{q}{p+q}\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\dfrac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$。由 $\mathrm{B}(p,q)$ 关于

p,q 的对称性有 $\mathrm{B}(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$，由此可得出（2）（3）小题结论。

（4）左边 $=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\dfrac{\Gamma(p+q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$，

右边 $=\dfrac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}\dfrac{\Gamma(q+r)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q+r)}=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$。

（5）作变量代换 $x=\dfrac{t}{1+t}$，则

$\mathrm{B}(p,q)=\displaystyle\int_0^1(1-x)^{p-1}x^{q-1}dx=\int_0^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^{p-1}\left(\dfrac{t}{1+t}\right)^{q-1}\dfrac{dt}{(1+t)^2}=\int_0^{\infty}\dfrac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$。

169. 计算下列积分：（1）$\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q\,dx$，$\operatorname{Re}p>-1$，$\operatorname{Re}q>-1$，$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx$；

（2）$\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha\theta\,d\theta$，$\int_0^{\pi/2}\cot^\alpha\theta\,d\theta$，$|\alpha|<1$。

（1）作代换 $1+x=2u$，即 $(1-x)=2(1-u)$，则

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q\,dx=2^{p+q+1}\int_0^1(1-u)^p u^q\,du=2^{p+q+1}\mathrm{B}(p+1,q+1)。$$

作代换 $x^2=u$，则 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=2\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\int_0^1(1-u)^n u^{-1/2}\,du=\mathrm{B}\left(n+1,\frac{1}{2}\right)$。

（2）作代换 $\tan^2\theta=x$，则

$$\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(1+x)}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1+\alpha}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{1-\alpha}{2}+\frac{1+\alpha}{2}}}\,dx$$

由上题第（5）小题，上式 $=\dfrac{1}{2}\mathrm{B}\left(\dfrac{1+\alpha}{2},\dfrac{1-\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{B}\left(1-\dfrac{1-\alpha}{2},\dfrac{1-\alpha}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2\sin\pi\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)}$

$$=\frac{\pi}{2\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}。$$

作代换 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 可得 $\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\cot^\alpha\varphi\,d\varphi$。

170. 计算积分 $\iiint_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}\,dxdydz$，其中积分区域 V 为：

（1）平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 以及 $x+y+z=1$ 包围的区域；

（2）平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 以及曲面 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^p+\left(\dfrac{y}{b}\right)^q+\left(\dfrac{z}{c}\right)^r=1$ 包围的区域。

（1）原积分 $=\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx\int_0^{1-x}y^{\beta-1}\,dy\int_0^{1-x-y}z^{\gamma-1}\,dz=\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx\int_0^{1-x}\dfrac{1}{\gamma}(1-x-y)^\gamma y^{\beta-1}\,dy$

$$=\frac{1}{\gamma}\int_0^1(1-x)^{\beta+\gamma}x^{\alpha-1}\,dx\int_0^1(1-u)^\gamma u^{\beta-1}\,du\quad（作代换\ \frac{y}{1-x}=u）$$

$$=\frac{1}{\gamma}\mathrm{B}(\beta+\gamma+1,\alpha)\mathrm{B}(\gamma+1,\beta)=\frac{1}{\gamma}\frac{\Gamma(\beta+\gamma+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} \text{。}$$

（2）作代换 $\begin{cases} x = a(R\sin\theta\cos\varphi)^{\frac{2}{p}} \\ y = b(R\sin\theta\sin\varphi)^{\frac{2}{q}} \\ z = c(R\cos\theta)^{\frac{2}{r}} \end{cases}$，则 $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial R} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial R} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial R} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{2a}{p}R^{\frac{2}{p}-1}\sin^{\frac{2}{p}}\theta\cos^{\frac{2}{p}}\varphi & \dfrac{2a}{p}R^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}-1}\theta\cos\theta\cos^{\frac{2}{p}}\varphi & -\dfrac{2a}{p}R^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin\varphi \\ \dfrac{2b}{q}R^{\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}}\theta\sin^{\frac{2}{q}}\varphi & \dfrac{2b}{q}R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos\theta\sin^{\frac{2}{q}}\varphi & \dfrac{2b}{q}R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos\varphi \\ \dfrac{2c}{r}R^{\frac{2}{r}-1}\cos^{\frac{2}{r}}\theta & -\dfrac{2c}{r}R^{\frac{2}{r}}\cos^{\frac{2}{r}-1}\theta\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8abc}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\sin^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{r}-1}\theta\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8abc}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\sin^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{r}-1}\theta\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi$$

原积分

$$= \iiint_V a^{\alpha-1}(R\sin\theta\cos\varphi)^{\frac{2}{p}(\alpha-1)}b^{\beta-1}(R\sin\theta\sin\varphi)^{\frac{2}{q}(\beta-1)}c^{\gamma-1}(R\cos\theta)^{\frac{2}{r}(\gamma-1)}|J|dRd\theta d\varphi$$

$$= \frac{8a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2\beta}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2\alpha}{p}-1}\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2\alpha}{p}+\frac{2\beta}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2\gamma}{r}-1}\theta d\theta\int_0^1 R^{\frac{2\alpha}{p}+\frac{2\beta}{q}+\frac{2\gamma}{r}-1}dR$$

$$= \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\frac{1}{\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}}B\left(\frac{\alpha}{p},\frac{\beta}{q}\right)B\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q},\frac{\gamma}{r}\right) = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\dfrac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\dfrac{\gamma}{r}\right)}{\left(\dfrac{\alpha}{p}+\dfrac{\beta}{q}+\dfrac{\gamma}{r}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{p}+\dfrac{\beta}{q}+\dfrac{\gamma}{r}\right)}$$

$$= \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\dfrac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\dfrac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{p}+\dfrac{\beta}{q}+\dfrac{\gamma}{r}+1\right)} \text{。}$$

171. 若 $\alpha > 0$，$0 < r < 1$，证明：$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(1+re^{-i\theta}\right)^{\alpha}d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}^2 r^{2k}$，

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(1-re^{-i\theta}\right)^{\alpha}d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2 r^{2k}$，因此根据 Abel 第二定理，有

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}^2 = \dfrac{2^{\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{\alpha}d\theta = \dfrac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)}$，

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2 = \dfrac{2^{\alpha}}{\pi}\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^{\alpha}\theta\,d\theta = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha/2+1)}\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$，

其中 $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\,\Gamma(\alpha-k+1)}$ 是普遍的二项式系数。

证：$\left(1+re^{i\theta}\right)^{\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}r^k e^{ik\theta}$，$\left(1+re^{-i\theta}\right)^{\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}r^k e^{-ik\theta}$。

$\left(1+re^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(1+re^{-i\theta}\right)^{\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\binom{\alpha}{n}\binom{\alpha}{k-n}r^k e^{i(2n-k)\theta}$。在收敛域内可逐项积分：

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(1+re^{-i\theta}\right)^{\alpha}d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\binom{\alpha}{n}\binom{\alpha}{k-n}r^k\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(2n-k)\theta}d\theta$。

由于 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(2n-k)\theta}d\theta = \begin{cases}1, & 2n=k\\ 0, & 2n\neq k\end{cases}$，所以上式右边 k 只取偶数，令 $k=2m$，则 n 只取 m，

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(1+re^{-i\theta}\right)^{\alpha}d\theta = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}^2 r^{2m}$。

同样可得 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(1-re^{-i\theta}\right)^{\alpha}d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2 r^{2k}$。

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}k\left[\binom{\alpha}{k}^2\Big/\binom{\alpha}{k+1}^2-1\right] = \lim_{k\to\infty}k\left[\left(\dfrac{k+1}{k-\alpha}\right)^2-1\right] = \lim_{k\to\infty}\dfrac{2(1+\alpha)k^2+(1-\alpha^2)k}{(k-\alpha)^2} = 2(1+\alpha) > 1$，

由极限形式的 Raabe 判别法可知 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}^2$ 和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2$ 收敛。由 Abel 第二定理得

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}^2 = \dfrac{2^{\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{\alpha}d\theta = \dfrac{2^{2\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2\alpha}\dfrac{\theta}{2}d\theta = \dfrac{2^{2\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi}2\cos^{2\alpha}\varphi\,d\varphi = \dfrac{2^{2\alpha}}{\pi}B\left(\alpha+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$$= \frac{2^{2\alpha}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1} \Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(\alpha+1)} = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)}。$$

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{\alpha}{k}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+e^{i\theta}\right)^\alpha\left(1-e^{-i\theta}\right)^\alpha d\theta$，可以看到，被积函数是多值的，为确定其

单值分枝，应将其表示为复变积分进行讨论。令 $e^{i\theta}=z$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+e^{i\theta}\right)^\alpha\left(1-e^{-i\theta}\right)^\alpha d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z+1)^\alpha(z-1)^\alpha}{z^{\alpha+1}}dz，$$

可看出，$\pm 1,0,\infty$ 是被积函数的枝点，上式中 C 是向右绕开-1，在 1 点被截断了的单位圆，

规定 $z=1$ 处的割线上岸 $\arg z=0$，$\arg(z+1)=0$，$\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$（如下图）。
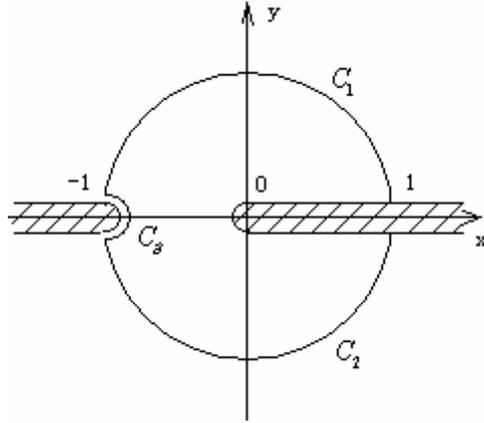
由于 $\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\dfrac{(z+1)^\alpha(z-1)^\alpha}{z^{\alpha+1}}=0$，所以 $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\dfrac{(z+1)^\alpha(z-1)^\alpha}{z^{\alpha+1}}dz=0$，即可以不考虑

这段积分。z 在 C_1 上变化时，$z-1=\cos\theta-1+i\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$，

$z+1=1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(z+1)^\alpha(z-1)^\alpha}{z^{\alpha+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\pi \frac{\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^\alpha\left[2\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}\right]^\alpha}{e^{i\theta(\alpha+1)}}d\left(e^{i\theta}\right)$$

$$= \frac{2^\alpha e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}}{2\pi}\int_0^\pi \sin^\alpha\theta d\theta。$$

当 z 在 C_2 上变化时，$z-1=\cos\theta-1+i\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$，

注意到 $\arg(z+1)$ 在 C_δ 上由 $\pi/2$ 减小到 $-\pi/2$，在 C_2 上由 $-\pi/2$ 增加到 0，所以

$z+1=1+\cos\theta+i\sin\theta=-2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\pi\right)}$，因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{(z+1)^\alpha(z-1)^\alpha}{z^{\alpha+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\pi^{2\pi}\frac{\left[-2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\pi\right)}\right]^\alpha\left[2\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}\right]^\alpha}{e^{i\theta(\alpha+1)}}d\left(e^{i\theta}\right)$$

$$=\frac{2^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}(-\sin\theta)^\alpha\,d\theta=\frac{2^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}}{2\pi}\int_0^\pi\sin^\alpha\varphi\,d\varphi\quad(\theta-\pi=\varphi)。$$

所以 $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2=\frac{2^\alpha}{2\pi}\left(e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}+e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}\right)\int_0^\pi\sin^\alpha\theta\,d\theta=\frac{2^\alpha}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^\pi\sin^\alpha\theta\,d\theta$

$$=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^\pi\sin^\alpha\frac{\theta}{2}\cos^\alpha\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\pi/2}2\sin^\alpha\varphi\cos^\alpha\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\frac{\Gamma^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$=\frac{\left[\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)-1}\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)\right]^2}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}=\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}。$$

不得不说一句，这道题。。。。。。。。。。。。。。。。。。。 太变态了！！！！！！！！！！！！！！！

172．证明：（1）$\dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\lim\limits_{b\to0}\left[\Gamma(b)-\mathrm{B}(a,b)\right]$；（2）$\dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\gamma=\displaystyle\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt$，其中

$\gamma=-\Gamma'(1)$（见第 166 及 167 题）。

（1）由于 $z=0$ 是 $\Gamma(z)$ 的一阶极点，留数为 1，所以有 $\lim\limits_{b\to0}b\Gamma(b)=1$。

$$\lim_{b \to 0}\left[\Gamma(b) - B(a,b)\right] = \lim_{b \to 0}\frac{\Gamma(b)\left[\Gamma(a+b) - \Gamma(a)\right]}{\Gamma(a+b)}$$

$$= \lim_{b \to 0}\left[\frac{1}{\Gamma(a+b)} \cdot b\Gamma(b) \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}\right] = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} \, \text{。}$$

（2） $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^{a-1}}{1-t}\,dt = \lim_{b \to 0}\int_0^1 \frac{1 - t^{a-1}}{(1-t)^{1-b}}\,dt = \lim_{b \to 0}\left[\int_0^1 (1-t)^{b-1}\,dt - \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt\right]$

$$= \lim_{b \to 0}\left[B(1,b) - B(a,b)\right],$$

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \int_0^1 \frac{1 - t^{a-1}}{1-t}\,dt = \lim_{b \to 0}\left\{\left[\Gamma(b) - B(a,b)\right] - \left[B(1,b) - B(a,b)\right]\right\}$$

$$= \lim_{b \to 0}\left[\Gamma(b) - B(1,b)\right] = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \, \text{。}$$

173. 证明 Laplace 变换的下列性质（假定有关函数的 Laplace 变换均存在，其象函数用相应的大写字母表示）：（1）$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \xrightarrow{LT} c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$；

（2）$\int_0^\infty f(t,\tau)d\tau \xrightarrow{LT} \int_0^\infty F(p,\tau)d\tau$；（3）$f(t-\tau) \xrightarrow{LT} e^{-p\tau}F(p)$；

（4）$e^{p_0 t}f(t) \xrightarrow{LT} F(p-p_0)$；（5）$f(at) \xrightarrow{LT} \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$，$a>0$；

（6）$\int_t^\infty \dfrac{f(\tau)}{\tau}d\tau \xrightarrow{LT} \dfrac{1}{p}\int_0^p F(q)dq$。

（1）$\int_0^\infty \left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right]e^{-pt}dt = c_1\int_0^\infty f_1(t)e^{-pt}dt + c_2\int_0^\infty f_2(t)e^{-pt}dt = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$。

（2）$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t,\tau)d\tau\right]e^{-pt}dt = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t,\tau)e^{-pt}dt\right]d\tau = \int_0^\infty F(p,\tau)d\tau$（假设可交换积分次序）。

（3）$\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = e^{-p\tau}\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx = e^{-p\tau}F(p)$（这里 $f(t-\tau) = f(t-\tau)\eta(t-\tau)$）。

（4）$\int_0^\infty \left[e^{p_0 t}f(t)\right]e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-p_0)t}dt = F(p-p_0)$。

（5）$\int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt = \dfrac{1}{a}\int_0^\infty f(x)e^{-\frac{p}{a}x}dx = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$。

（6）$\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \dfrac{f(\tau)}{\tau}d\tau\right]e^{-pt}dt = -\dfrac{1}{p}\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \dfrac{f(\tau)}{\tau}d\tau\right]\dfrac{d}{dt}\left(e^{-pt}\right)dt$

$\qquad = \dfrac{1}{p}\int_0^\infty \dfrac{f(\tau)}{\tau}d\tau - \dfrac{1}{p}\int_0^\infty \dfrac{f(t)}{t}e^{-pt}dt = \dfrac{1}{p}\left[\int_0^\infty F(q)dq - \int_p^\infty F(q)dq\right]$

$\qquad = \dfrac{1}{p}\int_0^p F(q)dq$。

174. 若 $f(t)$ 为周期函数，周期为 a，即 $f(t+a) = f(t)$，$t \geq 0$。设 $f(t)$ 的拉式变换 $F(p)$ 存在，证明：$F(p) = \dfrac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a f(t)e^{-pt}dt$。

$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{na}^{(n+1)a} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^\infty e^{-nap}\int_0^a f(x)e^{-px}dx$，

当 $\operatorname{Re} p > 0$ 时，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nap} = \frac{1}{1-e^{-ap}}$，$\displaystyle F(p) = \frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a f(t)e^{-pt}dt$。

175. 求下列函数的象函数：（1）t^n，$n=0,1,2,\cdots$；（2）t^α，$\operatorname{Re}\alpha > -1$；（3）$e^{-\lambda t}\sin\omega t$；

（4）$\dfrac{1-\cos\omega t}{t^2}$；（5）$\displaystyle\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}d\tau$；（6）$f(t)=\begin{cases} e^t, 0<t<1 \\ 0, t>1 \end{cases}$；（7）$\left|\sin\omega t\right|$；（8）$t-a\left[\dfrac{t}{a}\right]$，

$a>0$。

（1）由 $1 \xrightarrow{\ LT\ } \dfrac{1}{p}$ 和 $(-t)^n f(t) \xrightarrow{\ LT\ } F^{(n)}(p)$ 可得 $t^n \xrightarrow{\ LT\ } \dfrac{n!}{p^{n+1}}$。

（2）令 $pt=z$，则 $\displaystyle\int_0^\infty t^\alpha e^{-pt}dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_L z^\alpha e^{-z}dz$，其中 L 是从原点出发，辐角为 $\left|\arg p\right|$ 的

射线，若 $\left|\arg p\right| < \dfrac{\pi}{2}$，则 $\displaystyle\int_L z^\alpha e^{-z}dz = \Gamma(\alpha+1)$，$t^\alpha \xrightarrow{\ LT\ } \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$。

（3）$e^{-\lambda t}\sin\omega t = \dfrac{1}{2i}\left[e^{-(\lambda-i\omega)t} - e^{-(\lambda+i\omega)t}\right] \xrightarrow{\ LT\ } \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p+\lambda-i\omega} - \dfrac{1}{p+\lambda+i\omega}\right) = \dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$。

（4）$1-\cos\omega t \xrightarrow{\ LT\ } \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$，

$\dfrac{1-\cos\omega t}{t} \xrightarrow{\ LT\ } \displaystyle\int_p^\infty \left(\frac{1}{q} - \frac{q}{q^2+\omega^2}\right)dq = \ln\frac{q}{\sqrt{q^2+\omega^2}}\Bigg|_p^\infty = -\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+\omega^2}}$，

$\dfrac{1-\cos\omega t}{t^2} \xrightarrow{\ LT\ } = -\displaystyle\int_p^\infty \ln\frac{q}{\sqrt{q^2+\omega^2}}dq = -q\ln\frac{q}{\sqrt{q^2+\omega^2}}\Bigg|_p^\infty + \int_p^\infty \frac{\omega^2}{q^2+\omega^2}dq$

$\qquad\qquad = \dfrac{p}{2}\ln\dfrac{p^2}{p^2+\omega^2} + \omega\arctan\dfrac{\omega}{p}$。

（5）由 $\cos t \xrightarrow{\ LT\ } \dfrac{p}{p^2+1}$ 及上题第（6）小题结论，$\displaystyle\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}d\tau \xrightarrow{\ LT\ } \dfrac{1}{p}\int_0^p \frac{q}{q^2+1}dq$

$= \dfrac{1}{2p}\ln(p^2+1)$。

（6） $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 e^{(1-p)t}dt = \dfrac{e^{1-p}-1}{1-p}$ 。

（7） $\int_0^\infty |\sin\omega t|e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^\infty\left[\int_{2n\frac{\pi}{\omega}}^{(2n+1)\frac{\pi}{\omega}}(\sin\omega t)e^{-pt}dt - \int_{(2n+1)\frac{\pi}{\omega}}^{(2n+2)\frac{\pi}{\omega}}(\sin\omega t)e^{-pt}dt\right]$

$$= \int_0^{\pi/\omega}(\sin\omega x)e^{-px}dx\sum_{n=0}^\infty\left[e^{-2n\frac{\pi p}{\omega}}+e^{-(2n+1)\frac{\pi p}{\omega}}\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{\left(1+e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right)^2}{1-e^{-\frac{2\pi p}{\omega}}} \quad （设 \operatorname{Re} p>0）$$

$$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{2\operatorname{ch}^2\frac{\pi p}{2\omega}}{\operatorname{sh}\frac{\pi p}{\omega}} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{2\operatorname{ch}^2\frac{\pi p}{2\omega}}{2\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega}\operatorname{ch}\frac{\pi p}{2\omega}} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\operatorname{coth}\frac{\pi p}{2\omega}$$ 。

（8）设 $\operatorname{Re} p>0$ ，
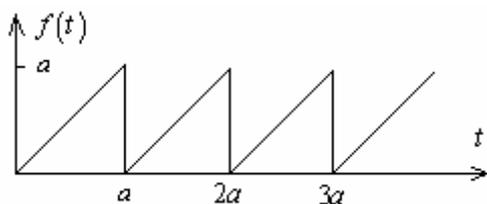
$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^\infty\int_{na}^{(n+1)a}(t-na)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^\infty\int_{na}^{(n+1)a}(t-na)e^{-pt}dt$$

$$= \int_0^a xe^{-px}dx\sum_{n=0}^\infty e^{-nap} = \left[-\frac{1}{p}ae^{-ap}+\frac{1}{p^2}(1-e^{-ap})\right]\frac{1}{1-e^{-ap}} = \frac{1}{p^2}-\frac{a}{p}\frac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}$$ 。

176．求下列函数的原函数：（1） $\dfrac{a^3}{p(p+a)^3}$ ；（2） $\dfrac{\omega}{p(p^2+\omega^2)}$ ；（3） $\dfrac{4p-1}{(p^2+p)(4p^2-1)}$ ；

（4） $\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ ；（5） $\dfrac{e^{-p\tau}}{p^2}$ ， $\tau>0$ ；（6） $\dfrac{1}{p}\dfrac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}$ ， $a>0$ 。

（1） $\dfrac{a^3}{p(p+a)^3} = \dfrac{1}{p}-\dfrac{a^2}{(p+a)^3}-\dfrac{a}{(p+a)^2}-\dfrac{1}{p+a}$ ，由于 $1\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{p}$ ，

$\dfrac{1}{2}t^2e^{-at}\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{(p+a)^3}$ ， $te^{-at}\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{(p+a)^2}$ ， $e^{-at}\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{p+a}$ ，所以原函数

为 $1-\left(1+at+\dfrac{a^2}{2}t^2\right)e^{-at}$ ， $t>0$ 。

（2） $\dfrac{\omega}{p\left(p^2+\omega^2\right)}=\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)$ ，由于 $1\xrightarrow{\ LT\ }\dfrac{1}{p}$ ， $\cos\omega t\xrightarrow{\ LT\ }\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ 。所以

原函数为 $\dfrac{1}{\omega}\left(1-\cos\omega t\right)$ 。

（3） $\dfrac{4p-1}{\left(p^2+p\right)\left(4p^2-1\right)}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{p-1/2}-3\dfrac{1}{p+1/2}$ ，所以原函数为

$1+\dfrac{5}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}e^{t/2}-3e^{-t/2}$ 。

（4） $\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}=-\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)$ ，由于 $\cos\omega t\xrightarrow{\ LT\ }\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ ，

$(-t)f(t)\xrightarrow{\ LT\ }\dfrac{d}{dp}F(p)$ ，所以原函数为 $t\cos\omega t$ 。

（5）由于 $t\xrightarrow{\ LT\ }\dfrac{1}{p^2}$ ， $f(t-\tau)\xrightarrow{\ LT\ }F(p)e^{-p\tau}$ ，所以原函数为 $t-\tau$ ， $t>\tau$ 。

（6） $\dfrac{1}{p}\dfrac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nap}}{p}$ （设 $\operatorname{Re}p>0$ ），由于 $\eta(t-na)\xrightarrow{\ LT\ }\dfrac{e^{-nap}}{p}$ ，所以原函数为

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta(t-na)=\left[\dfrac{t}{a}\right]$ 。

177．用普遍反演公式求下列函数的原函数：（1） $\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$ ；（2） $\dfrac{e^{-p\tau}}{p^4+4\omega^4}$ ；

（3） $\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$ ， $\alpha>0$ ；（4） $\dfrac{1}{p}\dfrac{\operatorname{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\operatorname{ch}l\sqrt{p}}$ ， $0<x<l$ 。

（1）取如下积分路径：
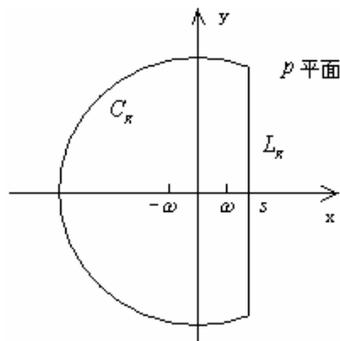
记 $F(p) = \dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$，则 $\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=\pm\omega} = \lim_{p\to\pm\omega} \dfrac{p}{p\pm\omega} e^{pt} = \dfrac{1}{2} e^{\pm\omega t}$。围道积分为

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{L_R} + \int_{C_R}\right) F(p)e^{pt}dp = \operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=\omega} + \operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\omega} = \operatorname{ch}\omega t \text{。（＊）}$$

令 $p = iz$，则 $\displaystyle\int_{C_R} F(p)e^{pt}dp = \int_{C_R' + \Gamma_R + \Gamma_R'} \frac{z}{z^2 + \omega^2} e^{itz}dz$，其中 $C_R' + \Gamma_R + \Gamma_R'$ 如下图：
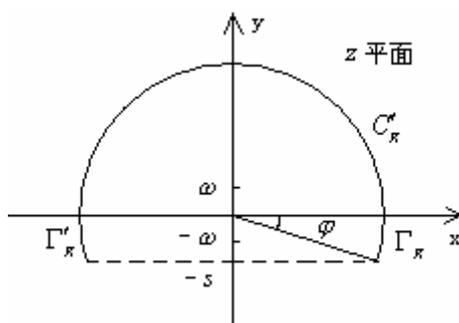
可解得 $\varphi = \arctan\dfrac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}$。设 $z \to \infty$ 时 $h(z)$ 一致（与辐角无关）趋于 0（显然这里的

$\dfrac{z}{z^2 + \omega^2}$ 满足此条件），则对任意的 $\varepsilon > 0$，当 $|z|$ 充分大时有 $|h(z)| < \varepsilon$，

$\displaystyle\int_{\Gamma_R} h(z)e^{itz}dz = iR\int_{-\varphi}^{0} h(Re^{i\theta}) e^{-tR\sin\theta} e^{itR\cos\theta} e^{i\theta}d\theta$，$\left|\displaystyle\int_{\Gamma_R} h(z)e^{itz}dz\right| \le \varepsilon R\int_{-\varphi}^{0} e^{-tR\sin\theta}d\theta$。当

$\theta \le 0$ 时有 $\sin\theta \ge \theta$（如下图），$t > 0$ 时，
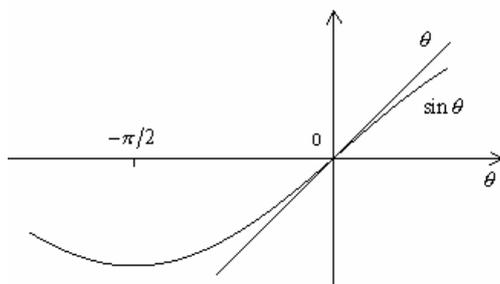
$$\left|\int_{\Gamma_R} h(z)e^{itz}dz\right| \le \varepsilon R\int_{-\varphi}^{0} e^{-tR\theta}d\theta = \frac{\varepsilon}{t}\left(e^{tR\varphi} - 1\right) \le \varepsilon R\varphi \le \varepsilon R\frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}$$，由于 $\dfrac{R}{\sqrt{R^2 - s^2}} \to 1$，

所以 R 充分大时有 $\dfrac{R}{\sqrt{R^2 - s^2}} < 1 + \varepsilon$，所以 $\left|\displaystyle\int_{\Gamma_R} h(z)e^{itz}dz\right| < s\varepsilon(1+\varepsilon)$，即

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} h(z)e^{itz}dz = 0$，同样可得 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R'} h(z)e^{itz}dz = 0$。

由 Jordan 引理可得 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R'} h(z)e^{itz}dz = 0$，所以令（＊）式 $R \to \infty$ 可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{p}{p^2 - \omega^2} e^{pt}dp = \operatorname{ch}\omega t$$，即 $\dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$ 的原函数为 $\operatorname{ch}\omega t$（$t > 0$）。

（2）记 $F(p)=\dfrac{1}{p^4+4\omega^4}$ ，则

$$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}}=\lim_{p\to-\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}}\frac{e^{pt}}{\left(p-\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}\right)\left(p^2-2\omega^2 i\right)}=\frac{e^{-\omega t}e^{i\omega t}}{16\omega^3 i}(1+i),$$

$$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}}=\lim_{p\to\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}}\frac{e^{pt}}{\left(p+\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}\right)\left(p^2-2\omega^2 i\right)}=\frac{e^{\omega t}e^{-i\omega t}}{16\omega^3 i}(-1-i),$$

$$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}}=\lim_{p\to-\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}}\frac{e^{pt}}{\left(p^2+2\omega^2 i\right)\left(p-\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}\right)}=\frac{e^{-\omega t}e^{-i\omega t}}{16\omega^3 i}(-1+i),$$

$$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}}=\lim_{p\to\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}}\frac{e^{pt}}{\left(p^2+2\omega^2 i\right)\left(p+\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}\right)}=\frac{e^{\omega t}e^{i\omega t}}{16\omega^3 i}(1-i)。$$

积分路径同上小题（取 $s>\omega$ ），可得

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\dfrac{1}{p^4+4\omega^4}e^{pt}dp=\dfrac{1}{4\omega^3}\left(\sin\omega t\operatorname{ch}\omega t-\cos\omega t\operatorname{sh}\omega t\right)$ ，所以 $\dfrac{e^{-p\tau}}{p^4+4\omega^4}$ 的原函数为

$$\frac{1}{4\omega^3}\left[\sin\omega(t-\tau)\operatorname{ch}\omega(t-\tau)-\cos\omega(t-\tau)\operatorname{sh}\omega(t-\tau)\right],\quad t>\tau。$$

（3）记 $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$ ，取如下积分路径（规定 $-\pi\le\arg p\le\pi$ ）：
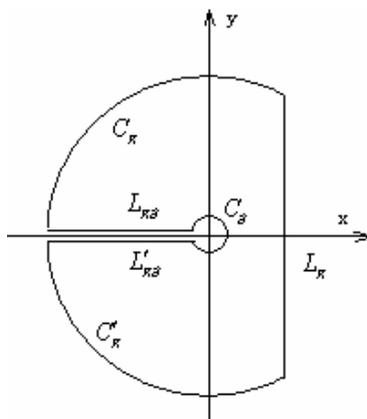
在 C_R 上 $0<\arg p\le\pi$ ， $0<\arg\sqrt{p}\le\pi/2$ ，所以 $\displaystyle\lim_{p\to\infty}F(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}=0$ ，

在 C_R' 上 $-\pi\le\arg p<0$ ， $-\pi/2\le\arg\sqrt{p}<0$ ，所以 $\displaystyle\lim_{p\to\infty}F(p)=0$ ，所以

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R}+\int_{C_R'}\right)F(p)e^{pt}dp=0$ 。又有 $\displaystyle\lim_{\delta\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta}F(p)e^{pt}dp=-\lim_{p\to0}pF(p)e^{pt}=-1$ 。

$\displaystyle\lim_{\substack{R\to\infty\\\delta\to0}}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{L_{R\delta}}+\int_{L_{R\delta}'}\right)F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{r}\sin\alpha\sqrt{r}e^{-rt}dr=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{x}\sin\alpha xe^{-x^2t}dx$ 。

记 $g(\alpha) = \int_0^\infty \dfrac{1}{x} \sin \alpha x e^{-x^2 t} dx$ ，有 $g'(\alpha) = \int_0^\infty \cos \alpha x e^{-x^2 t} dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$ ，

由于 $g(0) = 0$ ，所以 $g(\alpha) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}} \int_0^\alpha e^{-\frac{u^2}{4t}} du$ 。令围道积分 $\delta \to 0, R \to \infty$ 得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp - 1 + \frac{2}{\pi} g(\alpha) = 0 \text{ 。即原函数为}$$

$$1 - \frac{2}{\pi} g(\alpha) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}} e^{-x^2} dx = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \text{ 。}$$

（4）记 $F(p) = \dfrac{1}{p} \dfrac{\operatorname{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ ，它是单值函数（参考习题 03 第 53 题）。

$p = 0$ 以及 $p = -\dfrac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2$ （ $k = 0,1,2\cdots$ ）是它的一阶极点。

$$\operatorname{res}\left[F(p) e^{pt}\right]_{p=0} = \lim_{p \to 0} \frac{\operatorname{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}} e^{pt} = 1 \text{ ，}$$

$$\operatorname{res}\left[F(p) e^{pt}\right]_{p=-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2} = \lim_{p \to -\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2} \frac{2\operatorname{ch}(l-x)\sqrt{p}}{l\sqrt{p}\,\operatorname{sh} l\sqrt{p}} e^{pt}$$

$$= -\frac{4}{\pi} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{2k+1}{2l}\pi x\, e^{-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2 t} \text{ 。}$$

取如下积分路径（ $s > 0$ ），其中大圆半径为 $n^2\pi^2/l^2$ 。
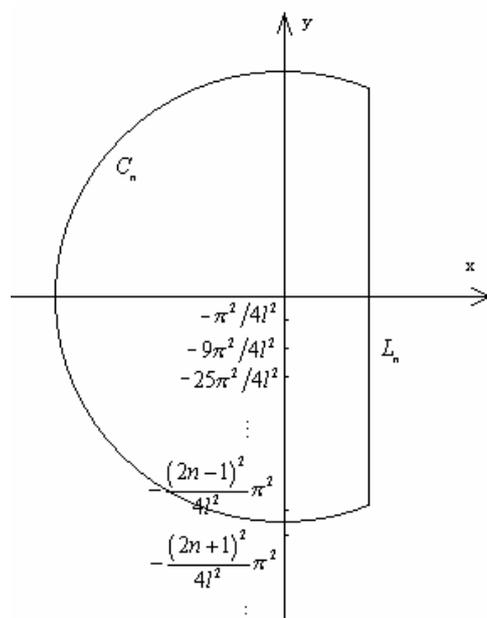
当 $0 < \arg p < \pi$ 时，$0 < \arg \sqrt{p} < \pi/2$，$\mathrm{Re}\sqrt{p} > 0$，

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\, l\sqrt{p}} = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{e^{(l-x)\sqrt{p}} + e^{-(l-x)\sqrt{p}}}{e^{l\sqrt{p}} + e^{-l\sqrt{p}}} = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{e^{(l-x)\sqrt{p}}}{e^{l\sqrt{p}}} = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} e^{-x\sqrt{p}} = 0 。$$

当 $\pi < \arg p < 2\pi$ 时，$\pi/2 < \arg\sqrt{p} < \pi$，$\mathrm{Re}\sqrt{p} < 0$，

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\, l\sqrt{p}} = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{e^{-(l-x)\sqrt{p}}}{e^{-l\sqrt{p}}} = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} e^{x\sqrt{p}} = 0 。$$

当 $p = -n^2\pi^2/l^2$，即为圆 C_n 上辐角为 π 的点时，有

$$\left| \frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\, l\sqrt{p}} \right| = \left| \frac{\cos \dfrac{l-x}{l} n\pi}{\cos n\pi} \right| = \left| \cos \frac{l-x}{l} n\pi \right| \le 1，\text{所以} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{p} \frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\, l\sqrt{p}} = 0 。$$

综上，当圆 C_n 上点 p 无论辐角为何值，只要模趋于 ∞，就有 $F(p) \to 0$，即

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} F(p) e^{pt} dp = 0 。\text{所以}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \mathrm{res}\left[F(p) e^{pt} \right]_{p=0} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{res}\left[F(p) e^{pt} \right]_{p=-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2}$$

$$= 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2k+1} \sin \frac{2k+1}{2l} \pi x\, e^{-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2 t} \right]$$

178. 设 $f(t) \xrightarrow{\ LT\ } F(p)$，$f_1(t) \xrightarrow{\ LT\ } F_1(p)$，$f_2(t) \xrightarrow{\ LT\ } F_2(p)$，试用 Laplace 反演公式证明：（1）$f(t-\tau) \xrightarrow{\ LT\ } F(p) e^{-p\tau}$；

（2）$\displaystyle\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\ LT\ } F_1(p) F_2(p)$。

（1）$\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left[F(p) e^{-p\tau} \right] e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{p(t-\tau)} dp = f(t-\tau)$。

（2）假设可交换积分次序，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left[F_1(p) F_2(p) \right] e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right] F_2(p) e^{pt} dp$$

$$= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_2(p) e^{p(t-\tau)} dp \right] d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau 。$$

179．利用 Laplace 变换计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt$；（2）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx$；

（3）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx$；（4）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xt}{x(x^2+1)}dx$。

（1）由于 $\sin xt \xrightarrow{\ LT\ } \dfrac{x}{p^2+x^2}$，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp$，所以

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt=\int_0^\infty \frac{x}{p^2+x^2}dp=\begin{cases}\pi/2\,,\,x>0\\-\pi/2\,,\,x<0\end{cases}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x。$$

（2）记 $f(t,x)=\dfrac{\sin xt}{\sqrt{x}}$，则其对 t 的拉式变换为 $F(p,x)=\dfrac{\sqrt{x}}{p^2+x^2}$。

由 173 题第（2）小题结论，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx \xrightarrow{\ LT\ } \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{p^2+x^2}dx$，注意到 $f(t,x)$ 拉式换式的

收敛域为 $\operatorname{Re}p>0$，即 $-\dfrac{\pi}{2}<\arg p<\dfrac{\pi}{2}$，多值函数 $\dfrac{\sqrt{z}}{p^2+z^2}$ 在 $0\leq\arg z\leq 2\pi$ 的单值分枝内的

奇点为 $pe^{i\pi/2}$ 和 $pe^{i3\pi/2}$。用多值函数的积分法可求得右边的积分 $=\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\Gamma(-1/2+1)}{p^{-1/2+1}}$，

即 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx \xrightarrow{\ LT\ } \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\Gamma(-1/2+1)}{p^{-1/2+1}}$。由 175 题第（2）题结论，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}$。

上面是针对 $t>0$ 的情况，当 $t<0$ 时，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx=-\int_0^\infty \frac{\sin x(-t)}{\sqrt{x}}dx=-\sqrt{\dfrac{\pi}{2(-t)}}$。综上，

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{2|t|}}\operatorname{sgn}t。$$

（3）$t>0$ 时，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx \xrightarrow{\ LT\ } p\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+p^2)}dx$。因为 $\dfrac{\cos xt}{x^2+a^2}$ 的拉式换式

收敛域为 $\operatorname{Re}p>0$，所以 pi 位于上半平面，$-pi$ 位于下半平面，可求得上式右边积分

$=\dfrac{\pi}{2a}\dfrac{1}{p+a}$。所以 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx=\dfrac{\pi}{2a}e^{-at}$。

当 $t<0$ 时，原积分 $=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x(-t)}{x^2+a^2}dx=\dfrac{\pi}{2a}e^{at}$。综上，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx=\dfrac{\pi}{2a}e^{-a|t|}$。

（4）$t > 0$ 时，原积分 $\xrightarrow{\ LT\ } \int_0^\infty \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+p^2\right)}dx = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}\right)$，原积分 $= \dfrac{\pi}{2}\left(1-e^{-t}\right)$。

所以原积分 $= \dfrac{\pi}{2}\left(1-e^{-|t|}\right)\operatorname{sgn} t$。

180. 利用 Laplace 变换求解下列微分方程（组）或积分方程：（1）已知 $i(0)=0$，$q(0)=0$，求 $i(t)$；（2）已知 $i(0)=0$，$q(0)=0$，求 $i(t)$。
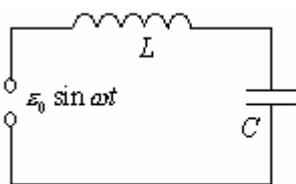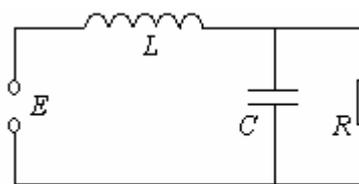
(1)　　　　　　　　　　　　　　(2)

（3）$\begin{cases} x''-x+y+z=0 \\ x+y''-y+z=0, \\ x+y+z''-z=0 \end{cases}$ $x(0)=1$，$y(0)=z(0)=0$，$x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$；

（4）$y(t)=a\sin t - 2\displaystyle\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$；

（5）$y(t)=a\sin bt + c\displaystyle\int_0^t y(\tau)\sin b(t-\tau)d\tau$，$b>c>0$；

（6）$f(t)+2\displaystyle\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = 9e^{2t}$。

（1）$\varepsilon = u_L + u_C$，代入 $u_C = \dfrac{q}{C}$，$u_L = L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2}$ 得 $\dfrac{d^2}{dt^2}q + \omega_0^2 q = \dfrac{1}{L}\varepsilon$（记 $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$），

两边取拉式变换得 $p^2 Q + \omega_0^2 Q = \dfrac{\varepsilon_0}{L}\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$，所以 $Q = \dfrac{\varepsilon_0 \omega}{L}\dfrac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(p^2+\omega_0^2\right)}$。

当 $\omega \neq \omega_0$ 时，$Q = \dfrac{\varepsilon_0 \omega}{L\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\dfrac{1}{p^2+\omega^2}-\dfrac{1}{p^2+\omega_0^2}\right)$，所以

$q(t) = \dfrac{\varepsilon_0 \omega}{L\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t - \dfrac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$。

当 $\omega = \omega_0$ 时，$Q = \dfrac{\varepsilon_0}{L}\dfrac{\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} = -\dfrac{\varepsilon_0}{2L}\dfrac{1}{p}\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$，

所以 $q(t) = \dfrac{\varepsilon_0}{2L}\displaystyle\int_0^t \tau\sin\omega\tau\, d\tau$。

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0\omega}{L\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right), & \omega_0 \neq \omega \\[3mm] \dfrac{\varepsilon_0}{2L}t\sin\omega t, & \omega_0 = \omega \end{cases}$$

（2）$C\dfrac{du_C}{dt} = i - i_R = i - \dfrac{u_C}{R}$，两边取拉式变换得（$u_C(0) = \dfrac{q_C(0)}{C} = 0$）$U_C = \dfrac{R}{RCp+1}I$。

$E = u_L + u_C = L\dfrac{di}{dt} + u_C$，两边取拉式变换，代入上式得 $I = \dfrac{E}{L}\dfrac{p + \dfrac{1}{RC}}{p\left(p^2 + \dfrac{1}{RC}p + \dfrac{1}{LC}\right)}$

$= \dfrac{E}{L}\dfrac{p+2\beta}{p\left(p^2 + 2\beta p + \gamma^2\right)}$，其中 $\beta = \dfrac{1}{2RC}$，$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$。根据上式分母中一元二次式

$p^2 + 2\beta p + \gamma^2$ 的判别式 $\Delta = 4\left(\beta^2 - \gamma^2\right)$ 的不同情况分别讨论：

（i）当 $\Delta > 0$，即 $L > 4CR^2$ 时，$I = \dfrac{E}{L}\dfrac{p+2\beta}{p(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)}$，其中 $\alpha_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$，

$\alpha_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$。$I$ 可分解为 $I = \dfrac{E}{L}\left[\dfrac{2\beta}{\alpha_1\alpha_2}\dfrac{1}{p} + \dfrac{\alpha_1 - 2\beta}{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)}\dfrac{1}{p+\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2 - 2\beta}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)}\dfrac{1}{p+\alpha_2}\right]$。

注意到 $\alpha_1\alpha_2 = \gamma^2 = \dfrac{1}{LC}$，上式中 $\dfrac{1}{p}$ 的系数 $\dfrac{2\beta}{\alpha_1\alpha_2} = \dfrac{L}{R}$，$\dfrac{1}{p+\alpha_1}$ 的系数

$\dfrac{\alpha_1 - 2\beta}{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{RC\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} = \dfrac{1 - \dfrac{L}{R}\dfrac{1}{LC\alpha_1}}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\dfrac{1 - \dfrac{L}{R}\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$，$\dfrac{1}{p+\alpha_2}$ 的系数 $\dfrac{\alpha_2 - 2\beta}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)} = \dfrac{1 - \dfrac{L}{R}\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$，

即 $I = \dfrac{E}{R}\left(1 - \dfrac{A}{p+\alpha_1} + \dfrac{B}{p+\alpha_2}\right)$，其中 $A = \dfrac{R/L - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$，$B = \dfrac{R/L - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$，所以

$$i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}\right)。$$

（ii）当 $\Delta = 0$，即 $L = 4CR^2$ 时，$I = \dfrac{E}{L}\dfrac{p+2\beta}{p(p+\beta)^2} = \dfrac{E}{R}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+\beta} - \dfrac{\beta}{2}\dfrac{1}{(p+\beta)^2}\right]$，

$$i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\beta t} - \dfrac{\beta}{2}te^{-\beta t}\right)。$$

（iii）当 $\Delta < 0$，即 $L < 4CR^2$ 时，$I = \dfrac{E}{L}\dfrac{p+2\beta}{p\left(p+\beta-i\omega_0\right)\left(p+\beta+i\omega_0\right)}$，

其中 $\omega_0 = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$，上式继续化为

$$I = \frac{E}{L}\left[\frac{L}{R}\frac{1}{p} + \left(-\frac{L}{2R} + \frac{\gamma^2-2\beta^2}{2i\omega_0\gamma^2}\right)\frac{1}{p+\beta-i\omega_0} + \left(-\frac{L}{2R} - \frac{\gamma^2-2\beta^2}{2i\omega_0\gamma^2}\right)\frac{1}{p+\beta+i\omega_0}\right]$$

$$= \frac{E}{R}\left\{\frac{1}{p} + \left[-\frac{1}{2} + \left(\frac{R}{L}-\beta\right)\frac{1}{2i\omega_0}\right]\frac{1}{p+\beta-i\omega_0} + \left[-\frac{1}{2} - \left(\frac{R}{L}-\beta\right)\frac{1}{2i\omega_0}\right]\frac{1}{p+\beta+i\omega_0}\right\}$$

$$= \frac{E}{R}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+\beta}{\left(p+\beta\right)^2+\omega_0^2} - \left(\beta-\frac{R}{L}\right)\frac{1}{\omega_0}\frac{\omega_0}{\left(p+\beta\right)^2+\omega_0^2}\right]。$$

所以 $i(t) = \dfrac{E}{R}\left\{1 - e^{-\beta t}\left[\cos\omega_0 t + \left(\beta-\dfrac{R}{L}\right)\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right]\right\}$。

（3）取拉式变换得 $\begin{cases}\left(p^2-1\right)X + Y + Z = p \\ X + \left(p^2-1\right)Y + Z = 0 \\ X + Y + \left(p^2-1\right)Z = 0\end{cases}$，解得 $X = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p}{p^2+1} + \dfrac{2p}{p^2-2}\right)$，

$Y = Z = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2-2}\right)$。所以 $x(t) = \dfrac{1}{3}\left(\cos t + 2\operatorname{ch}\sqrt{2}t\right)$，

$y(t) = z(t) = \dfrac{1}{3}\left(\cos t - \operatorname{ch}\sqrt{2}t\right)$。

（4）两边取拉式变换得 $Y = \dfrac{a}{p^2+1} - 2\dfrac{p}{p^2+1}Y$，所以 $Y = \dfrac{a}{\left(p+1\right)^2}$，即 $y(t) = ate^{-t}$。

（5）$Y = \dfrac{ab}{p^2+b^2-bc}$，$y(t) = a\sqrt{\dfrac{b}{b-c}}\sin\sqrt{b(b-c)}t$。

（6）$F = \dfrac{5}{p-2} + \dfrac{4}{p+1} - \dfrac{6}{\left(p+1\right)^2}$，$f(t) = 5e^{2t} + 4e^{-t} - 6te^{-t}$。

181．求解变系数常微方程初值问题：$\begin{cases}x'' + tx' + x = 0 \\ x(0)=1, x'(0)=0\end{cases}$。

$x' \xrightarrow{\ LT\ } pX - 1$，$tx' \xrightarrow{\ LT\ } -\dfrac{d}{dp}(pX-1) = -X - p\dfrac{dX}{dp}$，$x'' \xrightarrow{\ LT\ } p^2X - p$，原方程

两边取拉式变换得 $-\dfrac{dX}{dp}+pX-1=0$，再反演得 $x'+tx=0$，解之得 $x\left(t\right)=e^{-\frac{1}{2}t^{2}}$。

182. 设有放射性蜕变过程 $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow\cdots$，若其中三种同位素的分子数 $N_{1}\left(t\right)$，$N_{2}\left(t\right)$，

$N_{3}\left(t\right)$ 遵从方程及初始条件 $\begin{cases}\dfrac{dN_{1}}{dt}=-\lambda_{1}N_{1},N_{1}\left(0\right)=N\\[2mm]\dfrac{dN_{2}}{dt}=\lambda_{1}N_{1}-\lambda_{2}N_{2},N_{2}\left(0\right)=0\\[2mm]\dfrac{dN_{3}}{dt}=\lambda_{2}N_{2}-\lambda_{3}N_{3},N_{3}\left(0\right)=0\end{cases}$，其中 λ_{1}，λ_{2}，λ_{3} 为不相等

的常数，试求出 $N_{1}\left(t\right)$，$N_{2}\left(t\right)$，$N_{3}\left(t\right)$。

用上面加波浪线的字母表示相应的拉式变换 $\begin{cases}p\tilde{N}_{1}-N=-\lambda_{1}\tilde{N}_{1}\\ p\tilde{N}_{2}=\lambda_{1}\tilde{N}_{1}-\lambda_{2}\tilde{N}_{2}\\ p\tilde{N}_{3}=\lambda_{2}\tilde{N}_{2}-\lambda_{3}\tilde{N}_{3}\end{cases}$，

解得 $\tilde{N}_{1}=\dfrac{N}{p+\lambda_{1}}$，$\tilde{N}_{2}=\dfrac{\lambda_{1}N}{\lambda_{2}-\lambda_{1}}\left(\dfrac{1}{p+\lambda_{1}}-\dfrac{1}{p+\lambda_{2}}\right)$，

$$\tilde{N}_{3}=\lambda_{1}\lambda_{2}N\left[\frac{1}{\left(\lambda_{2}-\lambda_{1}\right)\left(\lambda_{3}-\lambda_{1}\right)}\frac{1}{p+\lambda_{1}}+\frac{1}{\left(\lambda_{1}-\lambda_{2}\right)\left(\lambda_{3}-\lambda_{2}\right)}\frac{1}{p+\lambda_{2}}+\frac{1}{\left(\lambda_{1}-\lambda_{3}\right)\left(\lambda_{2}-\lambda_{3}\right)}\frac{1}{p+\lambda_{3}}\right]$$

所以 $N_{1}\left(t\right)=Ne^{-\lambda_{1}t}$，$N_{2}\left(t\right)=\dfrac{\lambda_{1}N}{\lambda_{2}-\lambda_{1}}\left(e^{-\lambda_{1}t}-e^{-\lambda_{2}t}\right)$，

$$N_{3}\left(t\right)=\lambda_{1}\lambda_{2}N\left[\frac{1}{\left(\lambda_{2}-\lambda_{1}\right)\left(\lambda_{3}-\lambda_{1}\right)}e^{-\lambda_{1}t}+\frac{1}{\left(\lambda_{1}-\lambda_{2}\right)\left(\lambda_{3}-\lambda_{2}\right)}e^{-\lambda_{2}t}+\frac{1}{\left(\lambda_{1}-\lambda_{3}\right)\left(\lambda_{2}-\lambda_{3}\right)}e^{-\lambda_{3}t}\right]$$。

183. 定义零阶 Bessel 函数 $J_{0}\left(t\right)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos\left(t\cos\theta\right)d\theta$。（1）求 $J_{0}\left(t\right)$ 的像函数；

（2）利用卷积定理证明：$\displaystyle\int_{0}^{t}J_{0}\left(\tau\right)J_{0}\left(t-\tau\right)d\tau=\sin t$。

（1）当 $\mathrm{Re}\,p\geq\delta>0$ 时（δ 是任意小的正数），$\left|\displaystyle\int_{0}^{\infty}\cos\left(t\cos\theta\right)e^{-pt}dt\right|\leq\displaystyle\int_{0}^{\infty}e^{-\delta t}dt$，即左

边积分一致收敛，因此可交换积分次序：

$$J_{0}\left(t\right)\xrightarrow{LT}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{\pi}\cos\left(t\cos\theta\right)d\theta\right]e^{-pt}dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\int_{0}^{\infty}\cos\left(t\cos\theta\right)e^{-pt}dt\right]d\theta$$。

$$\int_0^\infty \cos\left(t\cos\theta\right)e^{-pt}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{it\cos\theta}e^{-pt}dt + \int_0^\infty e^{-it\cos\theta}e^{-pt}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\cos\theta}+\frac{1}{p+i\cos\theta}\right),$$

$$J_0(t)\xrightarrow{\ LT\ }\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \frac{1}{p-i\cos\theta}d\theta+\int_0^\pi \frac{1}{p+i\cos\theta}d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \frac{1}{p-i\cos\theta}d\theta+\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{p-i\cos\varphi}d\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{p-i\cos\theta}d\theta\text{。}$$

利用 $e^{i\theta}=z$ 将上面积分化成复变积分计算可得 $J_0(t)\xrightarrow{\ LT\ }\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$。

（2） $\displaystyle\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)d\tau \xrightarrow{\ LT\ }\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{p^2+1}$，反演得

$$\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)d\tau = \sin t\text{。}$$

184．试证明 $f(t)=2te^{t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)$ 的拉氏变换存在。

证：令 $\operatorname{Re}p\ge\delta>0$ 时（δ 是任意小的正数），则 $\left|f(t)e^{-pt}\right|\le 2te^{t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)e^{-\delta t}$。

作代换 $e^{t^2}=x$，即 $t=\sqrt{\ln x}$，则 $\displaystyle\int_0^\infty 2te^{t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)e^{-\delta t}dt = \int_1^\infty \sin x\, e^{-\delta\sqrt{\ln x}}dx$，

由于 $e^{-\delta\sqrt{\ln x}}$ 单调趋于 0，$\displaystyle\int_1^b \sin x\,dx$ 有界，所以 $\displaystyle\int_1^\infty \sin x\, e^{-\delta\sqrt{\ln x}}dx$ 收敛，因此 $\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 收敛，即 $f(t)$ 的拉氏变换存在。

185．设 $f(x)$ 的 Fourier 变换和 Fourier 反变换为：$F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx$，

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$。证明：

（1） $f(x-x_0)\xrightarrow{\ FT\ }e^{-i\omega x_0}F(\omega)$，$F(\omega-\omega_0)\xrightarrow{\ FT^{-1}\ }e^{i\omega_0 x}f(x)$；

（2） $f'(x)\xrightarrow{\ FT\ }i\omega F(\omega)$，$F'(\omega)\xrightarrow{\ FT^{-1}\ }-ixf(x)$；

（3） $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt \xrightarrow{\ FT\ }\frac{1}{i\omega}F(\omega)$；（4） $f_1(x)*f_2(x)\xrightarrow{\ FT\ }F_1(\omega)F_2(\omega)$，

$$F_1(\omega)*F_2(\omega)\xrightarrow{\ FT^{-1}\ }f_1(x)f_2(x),\ \text{其中}\ f_1(x)*f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(x-t)dt\text{。}$$

（1）$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x-x_0)e^{-i\omega x}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega x_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=e^{-\omega x_0}F(\omega)$，

$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega-\omega_0)e^{i\omega x}d\omega=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega_0 x}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{iux}du=e^{i\omega_0 x}f(x)$；

（2）$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-i\omega x}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\omega\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$

一般有 $f(\pm\infty)=0$，上式右边 $=i\omega F(\omega)$，

$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F'(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}F(x)e^{i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}-ix\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=-ixf(x)\text{。}$

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\right]e^{-i\omega x}dx=-\dfrac{1}{i\omega}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\right]\dfrac{d}{dx}e^{-i\omega x}dx$

$$=-\dfrac{1}{i\omega}\left[\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\right]e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\dfrac{1}{i\omega}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

若 $F(0)=0$，即 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=0$，则上式 $=\dfrac{1}{i\omega}F(\omega)$。

（4）假设可交换积分次序，$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(x-t)dt\right]e^{-i\omega x}dx$

$$=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x-t)e^{-i\omega x}dx\right]dt=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)F_2(\omega)e^{-\omega t}dt$$

$$=F_1(\omega)F_2(\omega),$$

$$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)F_2(\omega-u)du\right]e^{i\omega x}d\omega=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\omega-u)e^{i\omega x}d\omega\right]du$$

$$=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)e^{i\omega u}f_2(x)du=f_1(x)f_2(x)\text{。}$$

186. 证明 δ 函数的下列性质：（1）$\delta(x)=\delta(-x)$；（2）$x\delta(x)=0$；

（3）$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$；（4）$\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$；

（5）$\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{2|a|}\big[\delta(x-a)+\delta(x+a)\big]$；

（6）$\delta(x-a)\delta(x-b)=\delta(a-b)\delta(x-a)$。

（1）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx=\varphi(0)$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(-t)\delta(t)dt=\varphi(0)$，

所以 $\delta(x)=\delta(-x)$。

（2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)x\delta(x)dx=x\varphi(x)\big|_{x=0}=0$，所以 $x\delta(x)=0$。

（3）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\delta(x)dx=\varphi(0)f(0)$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(0)\delta(x)dx=\varphi(0)f(0)$，

所以 $f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$。

（4）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(ax)dx=\dfrac{1}{|a|}\varphi(0)$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\dfrac{1}{|a|}\delta(x)dx=\dfrac{1}{|a|}\varphi(0)$，

所以 $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$。

（5）不妨设 $a>0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x^2-a^2)dx=\int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon}\varphi(x)\delta(x^2-a^2)dx+\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\varphi(x)\delta(x^2-a^2)dx$$

$$=\int_{-2a\varepsilon+\varepsilon^2}^{2a\varepsilon+\varepsilon^2}\frac{\varphi\left(-\sqrt{u+a^2}\right)}{2\sqrt{u+a^2}}\delta(u)du+\int_{-2a\varepsilon+\varepsilon^2}^{2a\varepsilon+\varepsilon^2}\frac{\varphi\left(\sqrt{u+a^2}\right)}{2\sqrt{u+a^2}}\delta(u)du$$

$$=\frac{1}{2a}\big[\varphi(-a)+\varphi(a)\big]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{1}{2a}\big[\delta(x-a)+\delta(x+a)\big]dx。$$

（6）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-a)\delta(x-b)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(a)\delta(a-b)\delta(x-a)dx$

$=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(a-b)\delta(x-a)dx$，即 $\delta(x-a)\delta(x-b)=\delta(a-b)\delta(x-a)$。

187．若定义 δ 函数为 $\delta(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x)$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\phi_n(t)dt=\begin{cases}0,x<0\\1,x>0\end{cases}$。验证

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+(nx)^2}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{\pi x}$ 都是 δ 函数。

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+(nt)^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{nx} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{\pi} \left(\tan^{-1} nx + \frac{\pi}{2} \right),$$

$x < 0$ 时 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+(nx)^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \left(\tan^{-1} nx + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0$,

$x > 0$ 时 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+(nx)^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \left(\tan^{-1} nx + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$。

当 $x < 0$ 时，$\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin nt}{\pi t} dt = \lim\limits_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{nx} \frac{\sin u}{\pi u} du = 0$，

当 $x > 0$ 时，$\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin nt}{\pi t} dt = \lim\limits_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{nx} \frac{\sin u}{\pi u} du = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$。

188. 设 $B_n(\omega) = \dfrac{2\omega_0}{\pi(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin\left(2n\pi \dfrac{\omega}{\omega_0} \right)$，$n$ 是正整数，验证

$\lim\limits_{n \to \infty} B_n(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)$。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) B_n(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right) \sin\left(2n\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) \frac{1}{\pi(\omega - \omega_0)} \sin\left(2n\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) \frac{1}{\pi(\omega + \omega_0)} \sin\left(2n\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\omega_0 + \frac{\omega_0}{2\pi} x \right) \frac{\sin nx}{\pi x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(-\omega_0 + \frac{\omega_0}{2\pi} x \right) \frac{\sin nx}{\pi x} dx 。$$

（分别令 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}(\omega - \omega_0) = x$ 和 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}(\omega + \omega_0) = x$）上题已证明 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x)$，所以令上

式 $n \to \infty$ 可得 $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) B_n(\omega) d\omega = \varphi(\omega_0) - \varphi(-\omega_0)$，

即 $\lim\limits_{n \to \infty} B_n(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)$。

189. 定义三维 δ 函数为 $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$，求证：

（1）它在球坐标下的表达式为 $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{r^2} \delta(r - r_0) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$；

（2）$\nabla^2 \dfrac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} = -4\pi \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$。

（1）$\iiint \varphi(\boldsymbol{r})\dfrac{1}{r^2}\delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)dV$

$$=\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi\int_0^{\pi}\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\sin\theta d\theta\int_0^{\infty}\varphi(r,\theta,\varphi)\delta(r-r_0)dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi\int_0^{\pi}\varphi(r_0,\theta,\varphi)\delta(\theta-\theta_0)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\varphi(r_0,\theta_0,\varphi)\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi=\varphi(r_0,\theta_0,\varphi_0)。$$

（2）不妨设 $\boldsymbol{r}_0=0$。考虑积分 $\iiint_V \nabla^2\dfrac{1}{r}dV$，可验证，当 $r\neq 0$ 时，$\nabla^2\dfrac{1}{r}=0$，所以对于不包含原点的 V，有 $\iiint_V \nabla^2\dfrac{1}{r}dV=0$。若 V 包含原点，考虑以下极限式：

$$\lim_{a\to 0}\iiint_V \nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}dV=-3\lim_{a\to 0}\iiint_V \frac{a^2}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$=-12\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty}\frac{a^2}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}}r^2dr=-12\lim_{a\to 0}\int_0^{\pi/2}\frac{a^4\tan^2\theta}{a^5\left(1+\tan^2\theta\right)^{5/2}}a\sec^2\theta d\theta$$

$$=-12\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta=-4\pi。$$

190．求解下列微分方程：（1）$y''=-\delta(x-x_0)$，$y(0)=0$，$y'(1)=0$；

（2）$y''+y=-\delta(x-x_0)$，$y(0)=0$，$y(\pi/2)=0$。

（1）直接积分得 $y'=-\eta(x-x_0)+A$，由 $y'(1)=0$ 定出 $A=1$，即 $y'=1-\eta(x-x_0)$，

再积分得 $y=x-(x-x_0)\eta(x-x_0)+B$，由 $y(0)=0$ 定出 $B=0$，所以

$$y=x-(x-x_0)\eta(x-x_0)=\begin{cases}x,0\le x<x_0\\ x_0,x_0<x\le 1\end{cases}。$$

（2）$x<x_0$ 时，$y=A\sin x+B\cos x$，由 $y(0)=0$ 得 $y=A\sin x$。

$x>x_0$ 时，$y=C\sin x+D\cos x$。由 $y(\pi/2)=0$ 得 $y=D\cos x$。

由 $y(x_0^-)=y(x_0^+)$，$y'(x_0^+)-y'(x_0^-)=-1$ 可得 $y=\begin{cases}\cos x_0\sin x,0\le x<x_0\\ \sin x_0\cos x,x_0<x\le \pi/2\end{cases}。$

191. 求方程 $y'' - x^2 y = 0$ 在 $x = 0$ 邻域内的两个级数解。

$x = 0$ 为方程常点，设 $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$，代入方程得

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} - a_{n-2} \right] x^n = 0，$$

所以 $a_2 = 0$，$a_3 = 0$，$(n+1)(n+2) a_{n+2} - a_{n-2} = 0$（$n \geq 2$）。

$$a_{4n} = \frac{1}{4n(4n-1)} a_{4(n-1)} = \frac{1}{4n(4n-1)} \frac{1}{[4(n-1)][4(n-1)-1]} a_{4(n-2)} = \cdots$$

$$= \frac{1}{4n(4n-1)} \frac{1}{[4(n-1)][4(n-1)-1]} \cdots \frac{1}{4 \times (4-1)} a_0$$

$$= \frac{1}{4^n n(n-1) \cdots \times 1} \frac{1}{4^n \left(n - \frac{1}{4}\right) \left[(n-1) - \frac{1}{4}\right] \cdots \left(1 - \frac{1}{4}\right)} a_0$$

$$= \frac{\Gamma(3/4)}{n! \Gamma(n + 3/4)} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} a_0，\qquad\qquad （n \geq 1）$$

$$a_{4n+1} = \frac{1}{(4n+1)(4n)} a_{4(n-1)+1} = \frac{1}{(4n+1)(4n)} \frac{1}{[4(n-1)+1][4(n-1)]} a_{4(n-2)+1} = \cdots$$

$$= \frac{\Gamma(5/4)}{n! \Gamma(n + 5/4)} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} a_1，\qquad\qquad （n \geq 1）$$

由于 $a_2 = 0$，$a_3 = 0$，由递推关系可得 $a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0$（$n \geq 1$）。

所以两个级数解为 $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/4)}{n! \Gamma(n + 3/4)} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n}$，$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5/4)}{n! \Gamma(n + 5/4)} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+1}$。

192. 在 $x = 0$ 邻域内求解方程 $y'' - xy = 0$。

设 $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$，代入方程得 $2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} - a_{n-1} \right] x^n = 0$，所以 $a_2 = 0$，

$$a_{3n} = \frac{1}{3n(3n-1)} \frac{1}{[3(n-1)][3(n-1)-1]} \cdots \frac{1}{3 \times (3-1)} a_0 = \frac{\Gamma(2/3)}{n! \Gamma(n + 2/3)} \frac{a_0}{3^{2n}}，$$

$$a_{3n+1} = \frac{1}{(3n+1)(3n)} \frac{1}{\left[3(n-1)+1\right]\left[3(n-1)\right]} \cdots \frac{1}{(3+1)\times 3} a_1 = \frac{\Gamma(4/3)}{n!\Gamma(n+4/3)} \frac{a_1}{3^{2n}},$$

$a_{3n+2} = 0$，（上面 $n \geq 1$）所以两个级数解为

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2/3)}{n!\Gamma(n+2/3)} \frac{x^{3n}}{3^{2n}}, \quad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(4/3)}{n!\Gamma(n+4/3)} \frac{x^{3n+1}}{3^{2n}}。$$

193．求厄密方程 $u'' - 2xu' + 2\lambda u = 0$ 在 $x = 0$ 的解，并讨论当 λ 取何值时有一解截断为多项式。

设 $u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$，代入方程得 $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2(\lambda-n)a_n\right] x^n = 0$。

$$a_{2n} = \frac{2\left[2(n-1)-\lambda\right]}{2n(2n-1)} a_{2(n-1)} = \frac{2\left[2(n-1)-\lambda\right]}{2n(2n-1)} \frac{2\left[2(n-2)-\lambda\right]}{(2n-2)(2n-3)} \cdots \frac{2(-\lambda)}{2\times 1} a_0$$

$$= \frac{2^{2n}\Gamma(n-\lambda/2)}{(2n)!\Gamma(-\lambda/2)} a_0, \quad (n \geq 1)$$

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n}\Gamma\left(n+\dfrac{1-\lambda}{2}\right)}{(2n+1)!\Gamma\left(\dfrac{1-\lambda}{2}\right)} a_1 \quad (n \geq 1),$$

所以两个解为：$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{\Gamma(n-\lambda/2)}{(2n)!\Gamma(-\lambda/2)} (2x)^{2n}$，$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\dfrac{1-\lambda}{2}\right)}{(2n+1)!\Gamma\left(\dfrac{1-\lambda}{2}\right)} (2x)^{2n+1}$。

当 $\lambda = 2m$（$m = 0,1,2,\cdots$）时，$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{\Gamma(n-m)}{(2n)!\Gamma(-m)} (2x)^{2n}$，当 $n > m$ 时，$\Gamma(n-m)$

是有限值，$\dfrac{1}{\Gamma(-m)} = 0$，所以 $u_1 = \sum_{n=0}^{m} = \frac{\Gamma(n-m)}{(2n)!\Gamma(-m)} (2x)^{2n}$。$n \leq m$ 时，

$$\frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(-m)} = (n-1-m)(n-2-m)\cdots(-m) = (-1)^n m(m-1)\cdots(m-n+1) = (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!},$$

即 $u_1 = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n m!}{(2n)!(m-n)!} (2x)^{2n}$。

同样可得，当 $\lambda = 2m+1$ 时，$u_2 = \sum_{n=0}^{m} \dfrac{(-1)^n m!}{(2n+1)!(m-n)!}(2x)^{2n+1}$。

194．求超几何方程 $z(1-z)\dfrac{d^2u}{dz^2} + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)z\right]\dfrac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解，其中 α, β, γ 为已知常数，且 γ 不是整数。

$z=0$ 是方程的正则奇点，设 $u = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$，代入方程得：

$$\left[\rho(\rho-1)+\gamma\rho\right]a_0 z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+\rho+1)(k+\rho+\gamma)a_{k+1} - (k+\rho+\alpha)(k+\rho+\beta)a_k\right]z^k = 0$$

所以 $\rho(\rho-1)+\gamma\rho = 0$，解得 $\rho = 0$ 或 $\rho = 1-\gamma$。

$$a_k = \frac{(k-1+\rho+\alpha)(k-1+\rho+\beta)}{(k+\rho)(k-1+\rho+\gamma)}a_{k-1} = \cdots$$

$$= \frac{(k-1+\rho+\alpha)(k-1+\rho+\beta)}{(k+\rho)(k-1+\rho+\gamma)}\frac{(k-2+\rho+\alpha)(k-2+\rho+\beta)}{(k-1+\rho)(k-2+\rho+\gamma)}\cdots\frac{(\rho+\alpha)(\rho+\beta)}{(1+\rho)(\rho+\gamma)}a_0$$

$$= \frac{(k-1+\rho+\alpha)(k-2+\rho+\alpha)\cdots(\rho+\alpha)}{(k+\rho)(k-1+\rho)\cdots(1+\rho)}\frac{(k-1+\rho+\beta)(k-2+\rho+\beta)\cdots(\rho+\beta)}{(k-1+\rho+\gamma)(k-2+\rho+\gamma)\cdots(\rho+\gamma)}a_0$$

$$= \frac{\Gamma(k+\rho+\alpha)}{\Gamma(\rho+\alpha)}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(k+\rho+1)}\frac{\Gamma(k+\rho+\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)}\frac{\Gamma(\rho+\gamma)}{\Gamma(k+\rho+\gamma)}a_0$$

取 $\rho = 0$ 得第一个解 $u_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}\dfrac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\dfrac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(\beta)}\dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(k+\gamma)}z^k = F(\alpha,\beta,\gamma,z)$，

取 $\rho = 1-\gamma$ 得第二个解 $u_2 = z^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}\dfrac{\Gamma(k+1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\dfrac{\Gamma(k+1+\beta-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(k+2-\gamma)}z^k$

$$= z^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,z)。$$

195．求方程 $xy'' - xy' + y = 0$ 在 $x=0$ 邻域的两个独立解。

$x=0$ 是方程的正则奇点，设 $y = x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$，代入方程得：

$$\rho(\rho-1)a_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1+\rho)(k+\rho)a_{k+1} - (k-1+\rho)a_k\right]x^k = 0$$

所以 $\rho = 0$ 或 $\rho = 1$，$(k+\rho)(k-1+\rho)a_k - (k-2+\rho)a_{k-1} = 0$（$k \geq 1$）。

$\rho = 0$ 时，$0 \cdot a_1 + a_0 = 0$，$2a_2 - 0 \cdot a_1 = 0$，$a_3 = \dfrac{1}{6}a_2 = 0$，$a_4 = a_5 = \cdots = 0$ 即只有 a_1 不

为 0，所以一个解为 $y_1 = x$。当 $\rho = 1$ 时，$a_1 = a_2 = \cdots = 0$，解仍为 x。

设另一解为 $y = gx\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$，代入方程得

$$g + a_0 + (2a_2 - g)x + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+1)ka_{k+1} - (k-1)a_k\right]x^k = 0$$

所以 $g = -a_0$，$a_2 = \dfrac{1}{2}g = -\dfrac{1}{2}a_0$，

$$a_k = \frac{k-2}{k(k-1)}a_{k-1} = \frac{k-2}{k(k-1)}\frac{k-3}{(k-1)(k-2)}\frac{k-4}{(k-2)(k-3)}\cdots\frac{2}{4\times 3}\times\frac{1}{3\times 2}a_2$$

$$= \frac{1}{k(k-1)}\frac{1}{(k-1)}\frac{1}{(k-2)}\cdots\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{(k-1)k!}a_2 = -\frac{1}{(k-1)k!}a_0 \quad（k \geq 3）。$$

$$gx\ln x + \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = -a_0 x\ln x + a_0 + a_1 x - a_0\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k!}x^k，\quad 其中 a_1 项对应解 y_1，省略之$$

得到另一解 $y_2 = x\ln x - 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{(k-1)k!}x^k$。

196．求方程 $\dfrac{d^2 u}{dz^2} + \dfrac{2}{z}\dfrac{du}{dz} + m^2 u = 0$ 在 $z = 0$ 附近的两个独立解。

设 $u = z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$，代入方程得：

$$\rho(\rho+1)a_0 z^{-1} + (\rho+1)(\rho+2)a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1+\rho)(k+2+\rho)a_{k+1} + m^2 a_{k-1}\right]z^k = 0，$$

$\rho = 0, -1, -2$，$a_k = \dfrac{-m^2}{(k+1+\rho)(k+\rho)}a_{k-2}$。

取 $\rho = 0$ ， $a_{2k} = \dfrac{-m^2}{(2k+1)(2k)} \dfrac{-m^2}{(2k-1)(2k-2)} \cdots \dfrac{-m^2}{3 \times 2} a_0 = \dfrac{(-1)^k m^{2k}}{(2k+1)!} a_0$ ，

可得一个解 $u_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}(mz)^{2k} = \dfrac{1}{mz} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}(mz)^{2k+1} = \dfrac{\sin mz}{mz}$ 。

取 $\rho = -2$ ，则 $a_{2k+1} = \dfrac{-m^2}{(2k)(2k-1)} \dfrac{-m^2}{(2k-2)(2k-3)} \cdots \dfrac{-m^2}{2 \times 1} a_1 = \dfrac{(-1)^k m^{2k}}{(2k)!} a_1$ ，

可得另一解 $u_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}(mz)^{2k-1} = \dfrac{\cos mz}{mz}$ 。

197．求零阶 Bessel 方程 $\dfrac{d^2 u}{dz^2} + \dfrac{1}{z}\dfrac{du}{dz} + u = 0$ 在 $z = 0$ 邻域内的两个独立解。

设 $u = z^\rho \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 可得 $\rho^2 a_0 z^{-1} + (\rho-1)^2 a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1+\rho)^2 a_{k+1} + a_{k-1} \right] z^k = 0$ 。

可得 $\rho = 0$ 或 1 ， $a_k = -\dfrac{1}{(k+\rho)^2} a_{k-2}$ 。

取 $\rho = 0$ ， $a_{2k} = \dfrac{-1}{(2k)^2} a_{2(k-1)} = \dfrac{-1}{(2k)^2} \dfrac{-1}{[2(k-1)]^2} \cdots \dfrac{-1}{2^2} a_0 = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} a_0$ ，

可得一个解为： $u_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\dfrac{z}{2} \right)^{2k} = J_0(z)$ 。

设另一解为 $u = gJ_0(z)\ln z + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ，代入方程得：

$$g\left[zJ_0''(z) + J_0'(z) + zJ_0(z) \right]\ln z + 2gJ_0'(z) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 a_{k+1} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k = 0$$

由于 $J_0(z)$ 是方程的解，即 $zJ_0''(z) + J_0'(z) + zJ_0(z) = 0$ ，代入 $J_0(z)$ 表达式，并把 z 的偶次幂项和奇次幂项分开写成：

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(2k+1)^2 a_{2k+1} - a_{2k-1} \right] z^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(2k)^2 a_{2k} + a_{2k-2} + 4g \dfrac{(-1)^k k}{(k!)^2 2^{2k}} \right] z^{2k-1} = 0$$

所以 $a_1 = 0$ ，由 z 的偶次幂项系数的递推公式可得 $a_{2k+1} = 0$ 。

z 的奇次幂项系数的递推公式为： $a_{2k}=-\dfrac{a_{2k-2}}{(2k)^2}-g\dfrac{(-1)^k}{k\,(k!)^2\,2^{2k}}$

$$=-\dfrac{1}{(2k)^2}\left[-\dfrac{a_{2k-4}}{(2k-2)^2}-g\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\left[(k-1)!\right]^2\,2^{2k-2}}\right]-g\dfrac{(-1)^k}{k\,(k!)^2\,2^{2k}}$$

$$=\dfrac{a_{2k-4}}{2^4k^2(k-1)^2}-g\dfrac{(-1)^k}{(k-1)(k!)^2\,2^{2k}}-g\dfrac{(-1)^k}{k\,(k!)^2\,2^{2k}}$$

$$=\dfrac{(-1)^2\,a_{2k-4}}{2^4k^2(k-1)^2}-g\dfrac{(-1)^k}{(k!)^2\,2^{2k}}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k-1}\right)$$

$$=\cdots=\dfrac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}a_0-g\dfrac{(-1)^k}{(k!)^2\,2^{2k}}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k-1}+\cdots+1\right)。$$

所以另一解为 $u_2=J_0(z)\ln z+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k-1}+\cdots+1\right)\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2k}$ （ a_0 项对应解 u_1 ，故省略之）。

198．求 Legendre 方程 $(1-z^2)\dfrac{d^2u}{dz^2}-2z\dfrac{du}{dz}+\mu(\mu+1)u=0$ 在 $z=1$ 的有界解。

设 $u=(z-1)^{\rho}\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$ ，代入方程得：

$$2\rho^2a_0(z-1)^{-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[2(k+1+\rho)^2a_{k+1}+(k+1+\rho+\mu)(k+\rho-\mu)a_k\right](z-1)^k=0。$$

所以 $\rho=0$ ，

$$a_k=\dfrac{(k+\mu)(\mu+1-k)}{2k^2}a_{k-1}=\dfrac{(k+\mu)(\mu+1-k)}{2k^2}\dfrac{(k-1+\mu)(\mu+2-k)}{2(k-1)^2}\cdots\dfrac{(1+\mu)\mu}{2}a_0$$

$$=\dfrac{(k+\mu)(k-1+\mu)\cdots(1+\mu)\cdot(\mu+1-k)(\mu+2-k)\cdots\mu}{2^kk^2(k-1)^2\cdots1}a_0=\dfrac{\Gamma(k+1+\mu)}{2^k(k!)^2\Gamma(-k+1+\mu)}a_0$$

所以一个解为 $u_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(k+1+\mu)}{(k!)^2\Gamma(-k+1+\mu)}\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^k$ 。

可求出该级数收敛半径为 2，即收敛域为 $|z-1|<2$ ，即在收敛域内它是有界解。当 $\mu=n$ （整

数）时，若 $k \geq n+1$ 则有 $\dfrac{1}{\Gamma(-k+1+n)}=0$，而 $\Gamma(k+1+\mu)$ 为有限值，所以 u_1 截断为多

项式： $u_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+1+n)}{(k!)^2 \Gamma(-k+1+n)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k$ 。

199．求合流超几何方程 $z\dfrac{d^2 u}{dz^2} + (b-z)\dfrac{du}{dz} - au = 0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解，已知其中

的 a, b 为常数，且 $a>0$ ， $1-b \neq$ 整数。

设 $u = z^{\rho} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ，代入方程得

$$\rho(\rho+b-1)c_0 z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1+\rho)(k+\rho+b)c_{k+1} - (k+\rho+a)c_k\right]z^k = 0 \text{。}$$

$\rho = 0$ 或 $1-b$ ， $c_k = \dfrac{k-1+\rho+a}{(k+\rho)(k-1+\rho+b)}c_{k-1}$ 。

取 $\rho = 0$ ，则 $c_k = \dfrac{k-1+a}{k(k-1+b)}c_{k-1} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)}\dfrac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}c_0$ ，

所以一个解为 $u_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}z^k = F(a,b,z)$ 。

取 $\rho = 1-b$ ，则 $c_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{\Gamma(k+1+a-b)}{\Gamma(1+a-b)}\dfrac{\Gamma(2-b)}{\Gamma(k+2-b)}c_0$ ，所以另一解为

$$u_1 = z^{1-b}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k+1+a-b)}{\Gamma(1+a-b)}\frac{\Gamma(2-b)}{\Gamma(k+2-b)}z^k = z^{1-b}F(1+a-b,2-b,z) \text{。}$$

200．求方程 $\dfrac{d^2 u}{dz^2} + \dfrac{1}{z}\dfrac{du}{dz} - m^2 u = 0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解。

设 $u = z^{\rho}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ，代入方程得

$$\rho^2 a_0 z^{-1} + (1-\rho)^2 a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1+\rho)^2 a_{k+1} - m^2 a_{k-1}\right]z^k = 0 \text{。}$$

所以 $\rho = 0$ 或 1，$a_k = \dfrac{m^2}{(k+\rho)^2} a_{k-2}$。

取 $\rho = 0$，则 $a_{2k} = \dfrac{m^2}{(2k)^2} a_{2k-2} = \dfrac{1}{(k!)^2}\left(\dfrac{m}{2}\right)^{2k} a_0$，所以一个解为

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{mz}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{imz}{2}\right)^{2k} = J_0(imz)。$$

设另一解为 $u = g u_1 \ln z + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$，代入方程得（参考 197 题）

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(2k+1)^2 a_{2k+1} - m^2 a_{2k-1}\right]z^{2k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[(2k)^2 a_{2k} - m^2 a_{2k-2} + 4g\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\frac{k}{(k!)^2}\right]z^{2k-1} = 0。$$

所以 $a_{2k+1} = 0$，$a_{2k} = \dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{m}{2}\right)^2 a_{2k-2} - \dfrac{g}{k(k!)^2}\left(\dfrac{m}{2}\right)^{2k}$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2\left[\frac{1}{(k-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2 a_{2k-4} - \frac{g}{(k-1)\left[(k-1)!\right]^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k-2}\right] - \frac{g}{k(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}$$

$$= \frac{1}{k^2(k-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^4 a_{2k-4} - \frac{g}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right)$$

$$= \cdots = \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k} a_0 - \frac{g}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + 1\right)。$$

所以另一解为 $u_2 = J_0(imz)\ln z - \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + 1\right)\left(\frac{mz}{2}\right)^{2k}$。

201．一长为 l，横截面积为 S 的均匀弹性杆，已知一端（$x=0$）固定，另一端在杆轴方向上受拉力 F 而平衡。在 $t=0$ 时撤去外力 F。试推导杆的纵振动所满足的方程，边界条件和初始条件。
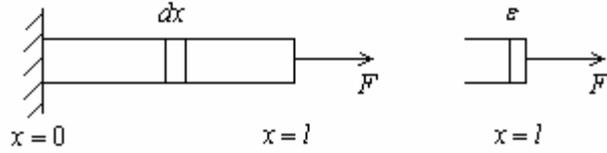
假设在垂直杆长方向的任一截面上各点的振动情况相同 $u(x,t)$ 表示杆上 x 处在 t 时刻相对于平衡位置的位移。取杆上长为 dx 的一小段，用 $P(x,t)$ 表示应力，由牛顿第二定律，

$\left[P(x+dx,t)-P(x,t) \right]S = dm\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，代入 $dm=\rho S dx$ 得 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。由 Hooke 定

律 $P=E\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 可得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$，其中 $a=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$。

取右端长为 ε 的一小段，由牛顿第二定律有 $F(t)-ES\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l-\varepsilon}=\rho\varepsilon S\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l-\alpha\varepsilon}$

（$0<\alpha<1$），令 $\varepsilon\to 0$ 有 $F(t)-ES\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0$。 　　　　　　　（a）

当 $t>0$ 时 $F(t)=0$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0$。由于左端点固定，故有 $u|_{x=0}=0$。

令（a）式中 $t=0$ 有 $F-ES\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=l\\t=0}}=0$。因为平衡时应力处处相等，所以该式对于任

意 $x\in[0,l]$ 都成立，即 $F-ES\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=0}=0$，对 x 积分可得 $u|_{t=0}=\dfrac{F}{ES}x$ （注意到

$u|_{x=0}=0$）。初始时处于平衡状态，各处速度为 0，即 $\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0$。

综上该定解问题为 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \\[2mm] u|_{x=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0 \\[2mm] u|_{t=0}=\dfrac{F}{ES}x,\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \end{cases}$。

202．一均匀弹性杆，原处于静止状态。其一端（$x=0$）固定。从$t=0$时刻起，在另一端（$x=l$）单位面积上施加外力P，力的方向与杆轴平行。试列出杆的纵振动方程，边界条件和初始条件。

将上题（a）式写成$P(t)S - ES\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$，则$t>0$时$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \dfrac{P}{E}$。

$t=0$时令$P(t)=0$则有$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=l\\t=0}} = 0$，同上题讨论可得$u\big|_{t=0} = 0$，其他条件与上题同。

该定解问题为$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\[2mm] u\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \dfrac{P}{E} \\[2mm] u\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$。

203．一均匀，各向同性的弹性圆膜，四周固定。试列出膜的横振动方程及边界条件。
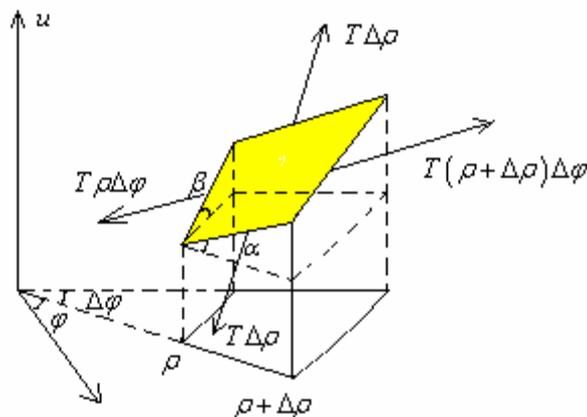
设ρ_m为面密度，任何方向单位长度张力是T。

沿ρ方向合张力为$T(\rho+\Delta\rho)\Delta\varphi\sin\alpha\big|_{\rho+\Delta\rho} - T\rho\Delta\varphi\sin\alpha\big|_{\rho}$，

φ方向合张力为$T\Delta\rho\sin\beta\big|_{\varphi+\Delta\varphi} - T\Delta\rho\sin\beta\big|_{\varphi}$。

在小振动近似下有$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \dfrac{\Delta u}{\Delta\rho}$，$\sin\beta \approx \tan\beta \approx \dfrac{\Delta u}{\rho\Delta\varphi}$，再由牛顿第二定律得

$$T(\rho+\Delta\rho)\Delta\varphi\dfrac{\Delta u}{\Delta\rho}\Big|_{\rho+\Delta\rho} - T\rho\Delta\varphi\dfrac{\Delta u}{\Delta\rho}\Big|_{\rho} + T\Delta\rho\dfrac{\Delta u}{\rho\Delta\varphi}\Big|_{\varphi+\Delta\varphi} - T\Delta\rho\dfrac{\Delta u}{\rho\Delta\varphi}\Big|_{\varphi}$$

$$= \rho_m \rho \Delta\rho \Delta\varphi \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{\substack{\rho+\varepsilon_1\Delta\rho \\ \varphi+\varepsilon_2\Delta\varphi}} \quad (0<\varepsilon_1<1, \ 0<\varepsilon_2<1),$$

即 $\displaystyle \frac{1}{\rho} \frac{\left.(\rho+\Delta\rho)\frac{\Delta u}{\Delta\rho}\right|_{\rho+\Delta\rho} - \left.\rho\frac{\Delta u}{\Delta\rho}\right|_{\rho}}{\Delta\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\left.\frac{\Delta u}{\Delta\varphi}\right|_{\varphi+\Delta\varphi} - \left.\frac{\Delta u}{\Delta\varphi}\right|_{\varphi}}{\Delta\varphi} - \frac{\rho_m}{T} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\substack{\rho+\varepsilon_1\Delta\rho \\ \varphi+\varepsilon_2\Delta\varphi}} = 0$

令 $\Delta\rho \to 0, \Delta\varphi \to 0$ 得 $\displaystyle \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$，其中 $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho_m}}$。

该定解问题为 $\begin{cases} \nabla^2 u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ u\big|_{\rho=R} = 0 \end{cases}$ （极坐标系中 $\nabla^2 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ ）。

204． 一长为 l 的均匀金属细杆（可近似看作一维的），通有恒定电流。设杆的一端（ $x=0$ ）温度恒为 0，另一端（ $x=l$ ）恒为 u_0，初始时温度分布为 $\dfrac{u_0}{l}x$。试写出杆中温度场所满足的方程，边界条件与初始条件。

由于热功率为 $I^2 R$，所以单位时间单位体积产生热量 $\dfrac{I^2 R}{lS}$。所以热传导方程为

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{I^2 R}{lS}, \quad \text{其中 } \rho \text{ 为体密度，} c \text{ 为比热。若用 } \lambda \text{ 表示线密度，则有 } \rho = \frac{\lambda}{S},$$

所以方程为 $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{kS}{\lambda c}\nabla^2 u = \frac{I^2 R}{\lambda cl}$ 。

该定解问题为 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{kS}{\lambda c}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{I^2 R}{\lambda cl} \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = u_0, u\big|_{t=0} = \dfrac{u_0}{l}x \end{cases}$ 。

205． 在铀块中，除了中子的扩散运动外，还进行着中子的吸收和增殖过程。设在单位时间内单位体积中，吸收和增殖的中子数均正比于该时刻该处的中子浓度 $u(\boldsymbol{r},t)$，因而净增中子数可表为 $\alpha u(\boldsymbol{r},t)$，$\alpha$ 为比例常数。试导出 $u(\boldsymbol{r},t)$ 所满足的方程。

用 $\boldsymbol{q}$ 表示单位时间流过某单位面积的中子数，有 $\boldsymbol{q} = -D\nabla u$ 。取一个六面体

$[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y] \times [z, z+\Delta z]$，$\Delta t$ 时间内沿 x 方向流入该六面体的中子数为

$$\left(q_x\big|_x - q_x\big|_{x+\Delta x} \right) \Delta y \Delta z \Delta t = D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x \right) \Delta y \Delta z \Delta t = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t ,$$

同样可得沿 y, z 方向流入该六面体的中子数分别为 $D\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ 和 $D\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$。

六面体内中子数一共增加 $\Delta u \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$，增加数应等于流入中子数加上净增中子数，即

$$\Delta u \Delta x \Delta y \Delta z = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t + \alpha u \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t 。$$

两边同除 $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$，令 $\Delta t \to 0$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + \alpha u$。

206．设有一均匀杆，长为 l，一端固定，另一端受外力 $F = A\sin\omega t$ 作用，其方向与杆一致，A 为常数，列出边界条件。

同 202 题，$\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \dfrac{F}{ES} = \dfrac{A}{ES}\sin\omega t$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$。

207．有一长为 l 的均匀细杆，现通过其两端，在单位时间内，经单位面积分别供给热量 Q_1 与 Q_2。试写出边界条件。

取左端长为 ε 的一小段，由能量守恒，$Q_1 - q(x,t)\big|_{x=\varepsilon} = \rho c \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=\alpha\varepsilon}$（$0 < \alpha < 1$）。

代入 $q = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 得 $Q_1 + k\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\varepsilon} = \rho c \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=\alpha\varepsilon}$。令 $\varepsilon \to 0$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\dfrac{Q_1}{k}$。

同样可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \dfrac{Q_2}{k}$。

208．有一半径为 a，表面涂黑的导体球，暴晒于日光下，在垂直于光线的单位面积上，单位时间内吸收热量 M。设周围媒质温度为 0，球面按牛顿冷却定律散热。试在适当的坐标系中写出边界条件。
牛顿冷却定律：单位时间流过表面单位面积的热量与表面两边的温度差成正比（比例系数设为 H）。
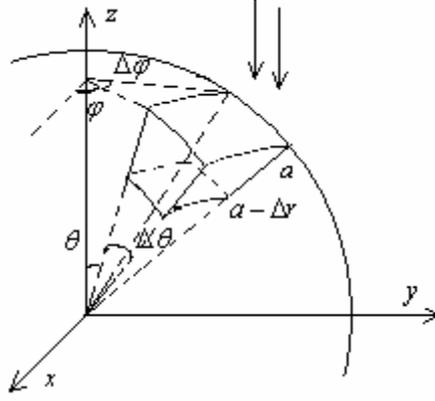
取上图的一小块体积元，Δt 时间内外表面（$r=a$）吸收热量为 $M\left(\Delta S_r\big|_{r=a}\cos\theta\right)\Delta t$，

外表面散失热量为 $H\,u\big|_{r=a}\,\Delta S_r\big|_{r=a}\,\Delta t$。

$r=a-\Delta r$ 面流入热量为 $q_r\big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta S_r\big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta t=-k\dfrac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a-\Delta r}\Delta S_r\big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta t$，

从 θ 面流入热量 $q_\theta\big|_\theta\,\Delta S_\theta\big|_\theta\,\Delta t=-\dfrac{k}{a}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_\theta\Delta S_\theta\big|_\theta\,\Delta t$，

从 $\theta+\Delta\theta$ 面流入热量 $-q_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta S_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta t=\dfrac{k}{a}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_{\theta+\Delta\theta}\Delta S_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta t$，

从 φ 面流入热量 $q_\varphi\big|_\varphi\,\Delta S_\varphi\big|_\varphi\,\Delta t=-\dfrac{k}{a\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_\varphi\Delta S_\varphi\big|_\varphi\,\Delta t$，

从 $\varphi+\Delta\varphi$ 面流入热量 $-q_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta S_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta t=\dfrac{k}{a\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi+\Delta\varphi}\Delta S_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta t$。

以上各式中 $\Delta S_r\big|_{r=a}=a^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi$，$\Delta S_r\big|_{r=a-\Delta r}=(a-\Delta r)^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi$，

$\Delta S_\theta\big|_\theta=a\sin\theta\Delta r\Delta\varphi$，$\Delta S_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}=a\sin(\theta+\Delta\theta)\Delta r\Delta\varphi$，$\Delta S_\varphi\big|_\varphi=\Delta S_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}=a\Delta r\Delta\theta$。

该体积元内增加热量为 $\rho c\Delta V\Delta u=\rho c a^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\Delta u$，由能量守恒可得

$$M\left(\Delta S_r\big|_{r=a}\cos\theta\right)\Delta t-H\,u\big|_{r=a}\,\Delta S_r\big|_{r=a}\,\Delta t-k\dfrac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a-\Delta r}\Delta S_r\big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta t$$

$$-\dfrac{k}{a}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_\theta\Delta S_\theta\big|_\theta\,\Delta t+\dfrac{k}{a}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_{\theta+\Delta\theta}\Delta S_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta t-\dfrac{k}{a\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_\varphi\Delta S_\varphi\big|_\varphi\,\Delta t$$

$$+\dfrac{k}{a\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi+\Delta\varphi}\Delta S_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta t=\rho c a^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\Delta u$$

化简得

$$Ma^2 \sin^2 \theta \cos \theta - H\, u\big|_{r=a}\, a^2 \sin^2 \theta - k \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a-\Delta r} (a-\Delta r)^2 \sin^2 \theta$$

$$+ k \sin\theta \Delta r \frac{1}{\Delta\theta} \left[\sin(\theta+\Delta\theta) \frac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_{\theta+\Delta\theta} - \sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_{\theta} \right] + k\Delta r \frac{1}{\Delta\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi+\Delta\varphi} - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi} \right)$$

$$= \rho c a^2 \sin^2 \theta \Delta r \frac{\Delta u}{\Delta t}\,。$$

令 $\Delta r, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta t \to 0$，因为 $\dfrac{1}{\Delta\theta}\left[\sin(\theta+\Delta\theta) \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_{\theta+\Delta\theta} - \sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_{\theta} \right] \to \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial\theta} \right)$，

$\dfrac{1}{\Delta\varphi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi+\Delta\varphi} - \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi} \right) \to \dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$，$\dfrac{\Delta u}{\Delta t} \to \dfrac{\partial u}{\partial t}$ 都是有限值，所以有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{H}{k} u \right)\bigg|_{r=a} = \frac{M}{k} \cos\theta\,。$$

上面的讨论适用于 $0 \le \theta \le \pi/2$ 的情况，即有光线照射到的范围，对于 $\pi/2 < \theta \le \pi$，只需

令上式 $M=0$ 即可，即 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{H}{k} u \right)\bigg|_{r=a} = \begin{cases} \dfrac{M}{k}\cos\theta, & 0 \le \theta \le \pi/2 \\[2mm] 0, & \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases}$

209．一完全柔软的均匀细线，重力可忽略。一端（$x=0$）固定在匀速转动的轴上，角速度为 ω，另一端（$x=l$）自由。由于惯性离心力的作用，此细线的平衡位置为水平线。试推导细线相对于其平衡位置作横振动的振动方程。
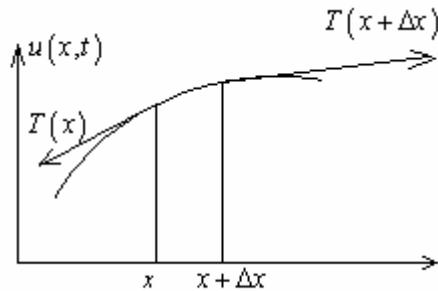
取长为 Δx 的一小段，水平方向（纵向）由牛顿第二定律及向心加速度公式可得

$T(x) - T(x+\Delta x) = \rho\Delta x \omega^2 x$，两边同除 Δx 并令 $\Delta x \to 0$ 得 $T'(x) = -\rho\omega^2 x$。

将上式积分，并由 $T(l)=0$ 可得 $T(x) = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 (l^2 - x^2)$。

垂直方向（横向）可列出牛顿方程 $T(x+\Delta x)\sin\theta\big|_{x+\Delta x} - T(x)\sin\theta\big|_{x} = \rho\Delta x \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x+\alpha\Delta x}$ 。

由小振动近似，$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \dfrac{\partial u}{\partial x}$，代入上式，两边同除 Δx 并令 $\Delta x \to 0$ 可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}，代入 T(x) 表达式即可得 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0。$$

210．一长为 l 的水平均匀弹性弦（两端固定），中点处悬一重物，质量为 M。试列出弦的横振动方程，边界条件以及连接条件。设悬线的质量及弹性形变均可忽略。
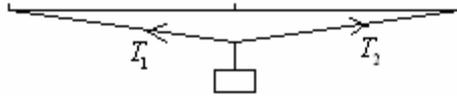
显然有 $u(x,t)\big|_{x=\frac{l}{2}-0} = u(x,t)\big|_{x=\frac{l}{2}+0}$。

由于重物没有水平方向的运动，所以 $T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2$。由于 $\theta_1 \approx 0, \theta_2 \approx 0$，所以 $T_1 = T_2$

（记为 T）。垂直方向有 $T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2 - Mg = M\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=\frac{l}{2}}$，由于 $\sin\theta_1 \approx -\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{l}{2}-0}$，

$\sin\theta_2 \approx \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{l}{2}+0}$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{l}{2}+0} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{l}{2}-0} = \dfrac{M}{T}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=\frac{l}{2}} + g\right)$。

该定解问题为
$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\[2mm]
u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = 0 \\[2mm]
u(x,t)\big|_{x=\frac{l}{2}-0} = u(x,t)\big|_{x=\frac{l}{2}+0} \\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{l}{2}+0} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{l}{2}-0} = \dfrac{M}{T}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=\frac{l}{2}} + g\right)
\end{cases}$$

211. 将下列方程分离变量：（1） $a_1(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_1(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b_2(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；

（2） $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$；（3） $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$；

（4） $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\dfrac{1}{\sin\alpha(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$。

（1）设 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，代入方程得：

$$a_1(x)X''(x)Y(y)+b_1(y)X(x)Y''(y)+a_2(x)X'(x)Y(y)+b_2(y)X(x)Y'(y)=0。$$

两边同除 $X(x)Y(y)$ 得 $\dfrac{a_1(x)X''(x)+a_2(x)X'(x)}{X(x)}=-\dfrac{b_1(y)Y''(y)+b_2(y)Y'(y)}{Y(y)}$。

令两边等于 λ，则 $\begin{cases}a_1(x)X''(x)+a_2(x)X'(x)-\lambda X(x)=0\\ b_1(y)Y''(y)+b_2(y)Y'(y)+\lambda Y(y)=0\end{cases}$。

（2）设 $u(\rho,\varphi)=\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi)$，代入方程得：$\dfrac{\Phi(\varphi)}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left[\rho\dfrac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]+\dfrac{\mathrm{P}(\rho)}{\rho^2}\dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=0$。

两边同乘 $\dfrac{\rho^2}{\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi)}$ 得 $\dfrac{\rho}{\mathrm{P}(\rho)}\dfrac{d}{d\rho}\left[\rho\dfrac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]=-\dfrac{1}{\Phi(\varphi)}\dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}$，

令两边等于 λ，则 $\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left[\rho\dfrac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]-\dfrac{\lambda}{\rho^2}\mathrm{P}(\rho)=0\\ \dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Phi(\varphi)=0\end{cases}$。

（3）设 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，代入方程得

$\dfrac{\Theta(\theta)}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dR(r)}{dr}\right]+\dfrac{R(r)}{r^2\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]=0$。两边同乘 $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$ 得

$\dfrac{1}{R(r)}\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dR(r)}{dr}\right]=-\dfrac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]$。令两边等于 λ 得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dR(r)}{dr}\right]-\dfrac{\lambda}{r^2}R(r)=0\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]+\lambda\Theta(\theta)=0\end{cases}$$

（4）令 $u(\alpha,\beta,\varphi)=v(\alpha,\beta,\varphi)\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}$ ，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}$ ，

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}\,\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\sin\alpha}{2\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}}v\,,\quad \frac{\partial u}{\partial\beta}=\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}\,\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\mathrm{sh}\,\beta}{2\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}}v\,,$$

代入方程得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{2(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{3/2}}v\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta}{2(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{3/2}}v\right]$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0$$

展开得

$$\frac{2\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta-\cos^2\alpha-1}{2(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{3/2}}\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}$$

$$+\frac{4\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta-\sin\alpha\cos^2\alpha-3\sin\alpha}{4(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{5/2}}v+\frac{\sin^2\alpha}{2(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{3/2}}\frac{\partial v}{\partial\alpha}$$

$$-\frac{\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta}{2(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{3/2}}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}$$

$$+\frac{3\sin\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{ch}^2\,\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta}{4(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{5/2}}v+\frac{\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta}{2(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{3/2}}\frac{\partial v}{\partial\beta}$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0$$

化简得 $\sin^2\alpha\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\sin\alpha\cos\alpha\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}+\sin^2\alpha\dfrac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}-\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha\,v=0$ 。

设 $v(\alpha,\beta,\varphi)=\mathrm{A}(\alpha)\mathrm{B}(\beta)\Phi(\varphi)$ ，代入上式，两边同除 $\mathrm{A}(\alpha)\mathrm{B}(\beta)\Phi(\varphi)$ 得

$$\frac{\sin\alpha}{\mathrm{A}(\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha\frac{d\mathrm{A}(\alpha)}{d\alpha}\right]-\frac{1}{4}\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{B}(\beta)}\frac{d\mathrm{B}(\beta)}{d\beta}=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}\,。$$

令上式两边等于 μ ，则

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\alpha\,\mathrm{A}(\alpha)}\dfrac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha\dfrac{d\mathrm{A}(\alpha)}{d\alpha}\right]-\dfrac{\mu}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\mathrm{B}(\beta)}\dfrac{d\mathrm{B}(\beta)}{d\beta}\\[3mm]\dfrac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}+\mu\Phi(\varphi)=0\end{cases}\ 。$$

令上面第一式两边等于 $-\lambda$ ，则

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha\dfrac{d\mathrm{A}(\alpha)}{d\alpha}\right]+\left(\lambda-\dfrac{\mu}{\sin^2\alpha}\right)\mathrm{A}(\alpha)=0 \\[2mm] \dfrac{d\mathrm{B}(\beta)}{d\beta}+\left(\lambda+\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{B}(\beta)=0 \\[2mm] \dfrac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}+\mu\Phi(\varphi)=0 \end{cases} 。$$

212．求解下列各本征值问题，证明各题中本征函数的正交性，并算出归一因子。

（1）$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0,X(l)=0 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0,X'(l)=0 \end{cases}$；（3）$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=0,X'(l)=0 \end{cases}$；

（4）$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(a)=0,X(b)=0 \end{cases}$；（5）$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0 \\ \alpha X(l)+\beta X'(l)=0 \end{cases}$；（6）$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ \alpha_1 X(0)+\beta_1 X'(0)=0 \\ \alpha_2 X(l)+\beta_2 X'(l)=0 \end{cases}$。

（1）方程两边同乘 X，并对 x 积分得

$$\lambda\int_0^l X^2(x)=-\int_0^l X''(x)X(x)dx=-X'(x)X(x)\Big|_0^l+\int_0^l X'^2(x)dx=\int_0^l X'^2(x)dx 。$$

当 $X(x)\neq 0$ 时，$\lambda=\dfrac{\displaystyle\int_0^l X'^2(x)dx}{\displaystyle\int_0^l X^2(x)dx}\geq 0$。当 $\lambda=0$ 时，即 $X''=0$，则解为 $X(x)=ax+b$，

代入边界条件得 $X(x)=0$，所以只有 $\lambda>0$。

$\lambda>0$ 时解为 $X(x)=a\sin\sqrt{\lambda}x+b\cos\sqrt{\lambda}x$，由边界条件可得 $b=0$，$\lambda=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$。

所以对应本征值 $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$ 的本征函数为 $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$（$n=1,2,\cdots$）。

设两对本征值和本征函数为 (λ_1,X_1)，(λ_2,X_2)，（$\lambda_1\neq\lambda_2$）即

$$\begin{cases} X_1''+\lambda_1 X_1=0 \\ X_1(0)=0,X_1(l)=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} X_2''+\lambda_2 X_2=0 \\ X_2(0)=0,X_2(l)=0 \end{cases}。$$

令第一个方程两边同乘 X_2 减去第二个方程两边同乘 X_1，并对 x 积分得

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^l X_1(x)X_2(x)dx=\int_0^l X_1(x)X_2''(x)-X_1''(x)X_2(x)dx$$

$$=X_1(x)X_2'(x)\Big|_0^l+X_1'(x)X_2(x)\Big|_0^l=0 。$$

由于 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$，所以 $\int_0^l X_1(x) X_2(x) dx = 0$，即不同本征值的本征函数正交。

$\int_0^l X_n^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{l}{2}$，所以归一化因子为 $\sqrt{\dfrac{2}{l}}$。

（2）$\lambda_n = \left(\dfrac{2n+1}{2l} \pi \right)^2$（$n = 0, 1, 2, \cdots$），$X_n(x) = \sin \dfrac{2n+1}{2l} \pi x$，归一因子 $\sqrt{\dfrac{2}{l}}$。

（3）此时本征值 λ 可取 0。$\lambda > 0$ 时可求出 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l} \right)^2$（$n = 1, 2, \cdots$），$X_n(x) = \cos \dfrac{n\pi}{l} x$

（$n = 1, 2, \cdots$）。$\lambda = 0$ 时可求出 $X_0(x) = 1$，因此本征值为 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l} \right)^2$（$n = 0, 1, 2, \cdots$），

本征函数 $X_n(x) = \cos \dfrac{n\pi}{l} x$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）。

$\int_0^l X_n^2(x) dx = \begin{cases} l, n = 0 \\ \dfrac{l}{2}, n > 0 \end{cases}$，所以归一因子为 $\sqrt{\dfrac{2}{l(1 + \delta_{n,0})}}$。

（4）解为 $X(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$，代入边界条件得

$C_1 \sin \sqrt{\lambda} a + C_2 \cos \sqrt{\lambda} a = 0$，$C_1 \sin \sqrt{\lambda} b + C_2 \cos \sqrt{\lambda} b = 0$，

写成矩阵形式为 $\begin{pmatrix} \sin \sqrt{\lambda} a & \cos \sqrt{\lambda} a \\ \sin \sqrt{\lambda} b & \cos \sqrt{\lambda} b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0$，

要使 $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ 有非零解，应有 $\begin{vmatrix} \sin \sqrt{\lambda} a & \cos \sqrt{\lambda} a \\ \sin \sqrt{\lambda} b & \cos \sqrt{\lambda} b \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda}(a - b) = 0$，

即本征值为 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{b-a} \right)^2$（$n = 1, 2, \cdots$），将 $C_2 = -\dfrac{\sin \sqrt{\lambda_n} a}{\cos \sqrt{\lambda_n} a} C_1$ 代入 $X(x)$ 表达式可得本

征函数 $X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi(x-a)}{b-a}$。归一化因子 $\sqrt{\dfrac{2}{b-a}}$。

（5）解为 $X(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$，代入边界条件得 $C_2 = 0$，

$\tan \sqrt{\lambda} l + \dfrac{\beta}{\alpha} \sqrt{\lambda} = 0$，本征值 λ_n 是左边方程的第 n（$= 1, 2, \cdots$）个正根，对应的本征函数

为 $X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$。

设本征值 λ_1 对应本征函数 X_1，本征值 λ_2（$\neq \lambda_1$）对应本征函数 X_2，则

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^l X_1(x) X_2(x) dx = \int_0^l \left[X_1(x) X_2''(x) - X_1''(x) X_2(x) \right] dx$$

$$= X_1(x) X_2'(x) \Big|_0^l - X_1'(x) X_2(x) \Big|_0^l = X_1(l) X_2'(l) - X_1'(l) X_2(l)$$

$$= -\frac{\alpha}{\beta} X_1(l) X_2(l) + \frac{\alpha}{\beta} X_1(l) X_2(l) = 0 \,,$$

即不同本征值的本征函数是正交的。

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \int_0^l \cos 2\sqrt{\lambda_n} x \, dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}} \sin 2\sqrt{\lambda_n} l = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \frac{\tan\sqrt{\lambda_n} l}{1 + \tan^2 \sqrt{\lambda_n} l} \,,$$

代入 $\tan\sqrt{\lambda_n} l = -\dfrac{\beta}{\alpha} \sqrt{\lambda_n}$ ，则上式 $= \dfrac{l}{2} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2 \lambda_n}$ ，所以归一化因子为 $\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{l}{2} + \dfrac{\alpha\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2 \lambda_n)}}}$ 。

（6）解为 $X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda} x + C_2 \cos\sqrt{\lambda} x$ ，代入边界条件得

$$\begin{cases} \alpha_1 C_2 + \beta_1 C_1 \sqrt{\lambda} = 0 \\ \alpha_2 C_1 \sin\sqrt{\lambda} l + \alpha_2 C_2 \cos\sqrt{\lambda} l + \beta_2 C_1 \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} l - \beta_2 C_2 \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} l = 0 \end{cases}$$

由第一式得 $C_2 = -C_1 \sqrt{\lambda} \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ ，代入第二式得

$$(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 \lambda) \tan\sqrt{\lambda} l + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \sqrt{\lambda} = 0 \,。$$ 本征值 λ_n 为该方程的第 n 个正根。

将 $C_2 = -C_1 \sqrt{\lambda_n} \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ 代入 $X(x)$ 表达式为 $\sin\sqrt{\lambda_n} x - \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} \sqrt{\lambda_n} \cos\sqrt{\lambda_n} x$ ，

本征函数可表示为 $X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x - \delta_n \right)$ ，其中 $\tan\delta_n = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} \sqrt{\lambda_n}$ 。

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}} \left[\sin 2\left(\sqrt{\lambda_n} l - \delta_n \right) + \sin 2\delta_n \right] \,。$$

由 $\tan\sqrt{\lambda_n} l = -\sqrt{\lambda_n} \dfrac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 \lambda}$ 可得：

$$\sin 2\sqrt{\lambda_n} l = \frac{2\tan\sqrt{\lambda_n} l}{1 + \tan^2 \sqrt{\lambda_n} l} = -2\sqrt{\lambda_n} \frac{\alpha_1^2 \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2^2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_1 \beta_2^2 \lambda_n - \alpha_2 \beta_1^2 \beta_2 \lambda_n}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 \lambda_n)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 \lambda_n)} \,,$$

$$\cos 2\sqrt{\lambda_n} l = \frac{1 - \tan^2 \sqrt{\lambda_n} l}{1 + \tan^2 \sqrt{\lambda_n} l} = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \beta_2^2 \lambda_n - \alpha_2^2 \beta_1^2 \lambda_n + 4\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \lambda_n + \beta_1^2 \beta_2^2 \lambda_n^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 \lambda_n)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 \lambda_n)} \,,$$

$$\sin 2\delta_n = \frac{2\tan\delta_n}{1+\tan^2\delta_n} = 2\sqrt{\lambda_n}\,\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n}, \quad \cos 2\delta_n = \frac{1-\tan^2\delta_n}{1+\tan^2\delta_n} = \frac{\alpha_1^2-\beta_1^2\lambda_n}{\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n},$$

$$\sin 2\left(\sqrt{\lambda_n}\,l - \delta_n\right) = \sin 2\sqrt{\lambda_n}\,l\,\cos 2\delta_n - \cos 2\sqrt{\lambda_n}\,l\,\sin 2\delta_n = -2\sqrt{\lambda_n}\,\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2\lambda_n}\,。$$

所以 $\int_0^l X_n^2(x)dx = \dfrac{l}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2\lambda_n} - \dfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n}\right),$

所以归一因子为 $\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{l}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2\lambda_n} - \dfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n}\right)}}\,。$

213. 如果我们采用最小二乘法用 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x$ 去逼近函数 $f(x)$，$f(x) \approx \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x$，

即要求均方误差 $\varepsilon = \displaystyle\int_0^l \left[f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right]^2 dx$ 取极小，试确定展开系数 a_n。

令 ε 对 $a_1, a_2, \cdots a_N$ 的偏导为零：

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_k} = -2\int_0^l \left[f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right]\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx = 0 \quad (k=1,2,\cdots N)，\text{即}$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx = \int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx。\quad \text{由}\left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}\text{的正交性可得}$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx。$$

214. 解第 201 题。 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\[2mm] u\big|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \\[2mm] u\big|_{t=0} = \dfrac{F}{ES}x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入方程得 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$。

本征值问题为 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$。212 题第（2）小题已解出该本征值问题：

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x。$$

解出 $T_n(t) = A_n \sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t + B_n \cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t$，

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t + B_n \cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x。$$

由 $u\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x = \frac{F}{ES}x$ 可定出

$$B_n = \frac{2F}{lES}\int_0^l x\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\,dx = \frac{8Fl}{ES\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}。$$

由 $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{2n+1}{2l}a\pi \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x = 0$ 可定出 $A_n = 0$。

所以 $u(x,t) = \frac{8Fl}{ES\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$。

215．一长为 l，两端固定的均匀弦，初始时，弦被拉开，待达到平衡后突然放手。试求解此问题。
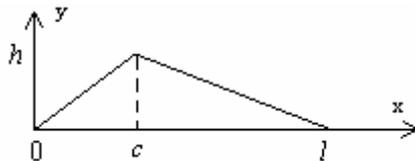
方程与上题同，边界条件为 $u\big|_{x=0} = 0$，$u\big|_{x=l} = 0$。

初始条件为：$u\big|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x, 0 \le x \le c \\ \dfrac{h(l-x)}{l-c}, c \le x \le l \end{cases}$，$\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$。

本征函数为 $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$（$n = 1, 2, \cdots$），解出 $T_n(t) = A_n \sin\frac{n\pi}{l}at + B_n \cos\frac{n\pi}{l}at$，

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\frac{n\pi}{l}at + B_n \cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x。$$

由初始条件定出 $B_n = \dfrac{2hl^2}{c(l-c)\pi^2}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c$, $A_n = 0$,

所以 $u(x,t) = \dfrac{2hl^2}{c(l-c)\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\cos\dfrac{n\pi}{l}at\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

216．两端固定的均匀弦，在硬质平锤的打击下以如下初速度分布振动：

$\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, 0 \le x < c-\delta \\ v_0, c-\delta < x < c+\delta \\ 0, c+\delta < x \le l \end{cases}$ 。若初位移为 0，求解弦的横振动。

仍有 $u = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\dfrac{n\pi}{l}at + B_n\cos\dfrac{n\pi}{l}at\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

$u\big|_{t=0} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x = 0$，所以 $B_n = 0$，

$\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{n\pi}{l}a\sin\dfrac{n\pi}{l}x$，所以

$A_n = \dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx = \dfrac{4lv_0}{n^2\pi^2a}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\sin\dfrac{n\pi}{l}\delta$。

所以 $u(x,t) = \dfrac{4lv_0}{\pi^2a}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\sin\dfrac{n\pi}{l}\delta\sin\dfrac{n\pi}{l}at\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

217．两端固定的均匀弦，其 $x = c$ 点受到尖锤的打击而获得冲量 I。若初位移为 0，求解弦的自由横振动。

假设冲量 I 均匀分布于 $c-\delta < x < c+\delta$ 上，由动量定理，$2\rho\delta v_0 = I$（ρ 是线密度），

所以 $v_0 = \dfrac{I}{2\rho\delta}$，代入上题结果，

$u_\delta(x,t) = \dfrac{2lI}{\pi^2a\rho\delta}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\sin\dfrac{n\pi}{l}\delta\sin\dfrac{n\pi}{l}at\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

$\left|\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\sin\dfrac{n\pi}{l}\delta\sin\dfrac{n\pi}{l}at\sin\dfrac{n\pi}{l}x\right| \le \dfrac{1}{n^2}$，所以上面的级数是一致收敛的，令 $\delta \to 0$，

则求极限与求和可交换顺序，即

$$\lim_{\delta \to 0} u_\delta(x,t) = \frac{2lI}{\pi^2 a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} c \left(\lim_{\delta \to 0} \frac{\sin \frac{n\pi}{l} \delta}{\delta} \right) \sin \frac{n\pi}{l} at \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$= \frac{2I}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} c \sin \frac{n\pi}{l} at \sin \frac{n\pi}{l} x \, .$$

218．一长为 $2l$ 的均匀杆，两端受力作用而分别压缩了 εl。在 $t=0$ 时撤去外力，试解杆的纵振动。

以杆的中点为坐标原点，由于两端自由，所以边界条件为 $\left. \dfrac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-l} = 0$，$\left. \dfrac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$。

由于杆均匀，故初始时刻位移是线性形式，即 $u|_{t=0} = -\varepsilon x$；初始时静止，所以 $\left. \dfrac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$。

同 212 题第（4）小题作法可得本征函数 $X_n(x) = \cos \dfrac{n\pi}{2l}(x+l)$。

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi}{2l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{2l} at \, ,$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{2l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{2l} at \right) \cos \frac{n\pi}{2l}(x+l) \, .$$

由 $\left. \dfrac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ 可得 $B_n = 0$，由 $u|_{t=0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos \dfrac{n\pi}{2l}(x+l) = -\varepsilon x$ 可得

$$A_n = \frac{-\varepsilon}{l} \int_{-l}^{l} x \cos \frac{n\pi}{2l}(x+l) dx = \frac{4l\varepsilon}{\pi^2 n^2} \left[1 - (-1)^n \right] \, ,\ \text{所以}\ A_{2k} = 0 \, ,\quad A_{2k+1} = \frac{8l\varepsilon}{\pi^2 (2k+1)^2} \, ,$$

所以 $u(x,t) = \dfrac{8l\varepsilon}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2l} at \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2l}(x+l)$

$$= \frac{8l\varepsilon}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} at \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \, .$$

219．设长为 l 的细杆，$x=0$ 端绝热，另一端与外界按牛顿冷却定律交换热量，外界温度为 0。杆身的散热可忽略不计。初始时杆的温度为 u_0。求杆中温度的分布与变化。

取右端长为 ε 的一小段，由牛顿冷却定律，Δt 时间内流出该段热量为 $H\, u|_{x=l} S \Delta t$（S 为杆

的横截面积），从内侧流入热量为 $qS\Delta t = -k\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon} S\Delta t$，该段内吸收热量为 $\rho c\varepsilon\Delta u$，由

能量守恒可得 $-H\left.u\right|_{x=l}S\Delta t - k\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon}S\Delta t = \rho c\varepsilon\Delta u$，即 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon} + \dfrac{H}{k}\left.u\right|_{x=l} = -\varepsilon\dfrac{\rho c}{kS}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$，

令 $\Delta t \to 0, \varepsilon \to 0$，由于 $\dfrac{\Delta u}{\Delta t} \to \dfrac{\partial u}{\partial t}$ 为有限值，所以 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} + h\left.u\right|_{x=l} = 0$（$h = \dfrac{H}{k}$）。

对于左端，可认为 $H = 0$，所以有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$。

即该定解问题为 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)_{x=l} = 0 \\ \left.u\right|_{t=0} = u_0 \end{cases}$

令 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 可得 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$，$T'(x) + \kappa\lambda T(t) = 0$。

本征值问题为 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases}$。

解得本征值 λ_n 是方程 $\sqrt{\lambda}\tan\sqrt{\lambda}l = h$ 的第 n 个正根，本征函数为 $X_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x$。

设本征值 λ_1 对应本征函数 X_1，本征值 λ_2 对应本征函数 X_2，可得

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^l X_1(x)X_2(x)dx = \int_0^l\left[X_1(x)X_2''(x) - X_1''(x)X_2(x)\right]dx$$

$$= \left.X_1(x)X_2'(x)\right|_0^l - \left.X_1'(x)X_2(x)\right|_0^l = X_1(l)X_2'(l) - X_1'(l)X_2(l)$$

$$= -hX_1(l)X_2(l) + hX_1(l)X_2(l) = 0。$$

即证明了本征函数的正交性。

解得 $T_n(t) = A_n e^{-\kappa\lambda_n t}$，则 $u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\sqrt{\lambda_n}x e^{-\kappa\lambda_n t}$。

由初始条件 $u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\sqrt{\lambda_n}x$ 及本征函数的正交性有 $A_n = u_0\dfrac{\int_0^l\cos\sqrt{\lambda_n}xdx}{\int_0^l\cos^2\sqrt{\lambda_n}xdx}$。

$$\int_0^l \cos\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,l = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_n}\,l}{\sqrt{1+\tan^2\sqrt{\lambda_n}\,l}} = (-1)^{n-1}\frac{h}{\sqrt{\lambda_n\left(\lambda_n+h^2\right)}}\ ,$$

$$\int_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx = \frac{l}{2}+\frac{1}{2}\int_0^l \cos 2\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx = \frac{l}{2}+\frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}\sin 2\sqrt{\lambda_n}\,l$$

$$= \frac{l}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_n}\,l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_n}\,l} = \frac{1}{2}\left(l+\frac{h}{\lambda_n+h^2}\right)\text{。}$$

所以 $A_n = (-1)^{n-1}\,2hu_0\,\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n\left(\lambda_n+h^2\right)}}\dfrac{1}{\left(l+\dfrac{h}{\lambda_n+h^2}\right)}$,

$$u(x,t) = 2hu_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n\left(\lambda_n+h^2\right)}}\frac{1}{\left(l+\dfrac{h}{\lambda_n+h^2}\right)}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x\,e^{-\kappa\lambda_n t}\ \text{。}$$

220. 求解细杆的导热问题，杆长为 l ，两端（ $x=0$ 及 $x=l$ ）均保持为 0 度，初始温度分布 $u\big|_{t=0} = b\,x(l-x)/l^2$ 。

可得本征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x$ ，解出 $T_n(t) = A_n e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$ ， $u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\dfrac{n\pi}{l}x\,e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$ 。

代入初始条件， $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\dfrac{n\pi}{l}x = \dfrac{b}{l^2}x(l-x)$ ，所以 $A_n = \dfrac{2b}{l^3}\int_0^l x(l-x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx$

$= \dfrac{4b}{\pi^3 n^3}\left[1-(-1)^n\right]$ ，则 $A_{2k}=0$ ， $A_{2k+1} = \dfrac{8b}{\pi^3(2k+1)^3}$ ，

所以 $u(x,t) = \dfrac{8b}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{l}x\,e^{-\kappa\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}t}$ 。

221. 求解：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\[2mm] u\big|_{x=0}=u_0,\ u\big|_{x=a}=u_0 y \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=b}=0 \end{cases}$$

设 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，则 $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda$。可得到本征值问题 $\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \\ Y'(0)=0,Y'(b)=0 \end{cases}$。

$\lambda\displaystyle\int_0^b Y^2(y)dy=-\int_0^b Y''(y)Y(y)dy=-Y'(y)Y(y)\Big|_0^b+\int_0^b Y'^2(y)dy=\int_0^b Y'^2(y)dy$，当

$Y(y)\neq 0$ 时有 $\lambda=\dfrac{\displaystyle\int_0^b Y'^2(y)dy}{\displaystyle\int_0^b Y^2(y)dy}\geq 0$。

可得本征函数 $Y_n(y)=\cos\dfrac{n\pi}{b}y$（$n=0,1,2\cdots$）。

解得 $X_n(x)=Cx+A_0+A_n\,\mathrm{ch}\dfrac{n\pi}{b}x+B_n\,\mathrm{sh}\dfrac{n\pi}{b}x$（$n=1,2\cdots$），其中 $Cx+A_0$ 对应本征值

$\lambda_0=0$。则 $u(x,y)=A_0+Cx+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\,\mathrm{ch}\dfrac{n\pi}{b}x+B_n\,\mathrm{sh}\dfrac{n\pi}{b}x\right)\cos\dfrac{n\pi}{b}y$，

由 $u\big|_{x=0}=u_0$ 可得 $u_0=A_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\dfrac{n\pi}{b}y$，所以 $A_0=u_0$，$A_n=0$（$n=1,2,\cdots$）。

由 $u\big|_{x=a}=u_0 y$ 可得 $u_0 y=u_0+Ca+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,\mathrm{sh}\dfrac{n\pi}{b}a\cos\dfrac{n\pi}{b}y$，

$B_n=\dfrac{2u_0}{b\,\mathrm{sh}\dfrac{n\pi}{b}a}\displaystyle\int_0^b(y-1)\cos\dfrac{n\pi}{b}ydy=\dfrac{2bu_0}{n^2\pi^2}\dfrac{1}{\mathrm{sh}\dfrac{n\pi}{b}a}\left[(-1)^n-1\right]$，

$B_{2k}=0$，$B_{2k+1}=-\dfrac{4bu_0}{\pi^2}\dfrac{1}{(2k+1)^2\,\mathrm{sh}\dfrac{(2k+1)\pi}{b}a}$。

$C=\dfrac{u_0}{ab}\displaystyle\int_0^b(y-1)dy=\dfrac{b-2}{2a}u_0$，所以

$u(x,y)=u_0+\dfrac{b-2}{2a}u_0 x-\dfrac{4bu_0}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2\,\mathrm{sh}\dfrac{(2k+1)\pi}{b}a}\,\mathrm{sh}\dfrac{(2k+1)\pi}{b}x\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{b}y$

222. 在带状区域 $0\leq x\leq a$，$0\leq y<\infty$ 中求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=a}=0 \\ u\big|_{y=0}=A\left(1-\dfrac{x}{a}\right),\displaystyle\lim_{y\to\infty}u=0 \end{cases}$。

可求得本征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{a}x$ （$n = 1, 2, \cdots$）。

由 $\lim\limits_{y\to\infty} u = 0$ 得 $Y_n(y) = C_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$，则 $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \sin\dfrac{n\pi}{a}x e^{-\frac{n\pi}{a}y}$。

由 $u\big|_{y=0} = A\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$ 得 $C_n = \dfrac{2A}{a}\displaystyle\int_0^a \left(1 - \dfrac{x}{a}\right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x\, dx = \dfrac{2A}{n\pi}$。

所以 $u(x,y) = \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{a}x e^{-\frac{n\pi}{a}y} = \dfrac{2A}{\pi}\dfrac{1}{2i}\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{a}(-y+ix)} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{a}(-y-ix)}\right]$

$= \dfrac{2A}{\pi}\dfrac{1}{2i}\left\{-\ln\left[1 - e^{\frac{\pi}{a}(-y+ix)}\right] + \ln\left[1 - e^{\frac{\pi}{a}(-y-ix)}\right]\right\}$ （$\ln(1-z) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$，$|z| < 1$）

$= \dfrac{2A}{\pi}\dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{1 - e^{\frac{\pi}{a}(-y-ix)}}{1 - e^{\frac{\pi}{a}(-y+ix)}} = \dfrac{2A}{\pi}\dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{1 - e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\dfrac{\pi}{a}x + i e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\dfrac{\pi}{a}x}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\dfrac{\pi}{a}x - i e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\dfrac{\pi}{a}x}$

$= \dfrac{2A}{\pi}\dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{1 + i\dfrac{e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\dfrac{\pi}{a}x}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\dfrac{\pi}{a}x}}{1 - i\dfrac{e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\dfrac{\pi}{a}x}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\dfrac{\pi}{a}x}} = \dfrac{2A}{\pi}\arctan\dfrac{e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\dfrac{\pi}{a}x}{1 - e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\dfrac{\pi}{a}x}$。

223．当层状铀块的厚度超过一定值（称为临界厚度）时，中子浓度将随时间增加而增加，以致引起铀块爆炸。这就是原子弹爆炸的基本过程。试估计层状铀块的临界厚度。假定中子浓度满足齐次的第一类边界条件。方程见 205 题。

方程（一维）：$\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha u$，边界条件：$u\big|_{x=0} = 0$，$u\big|_{x=l} = 0$。

分离变量可得本征值 $\lambda_n = D\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 - \alpha$ （$n = 1, 2, \cdots$），所以 $T_n = A_n e^{-\lambda_n t} = A_n e^{\left[\alpha - D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]t}$。

当 $\alpha - D\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 > 0$ 时，此函数递增。由此可得临界厚度 $l_c = \pi\sqrt{\dfrac{D}{\alpha}}$。

224. 求解两端固定弦的阻尼振动问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

分离变量得 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + 2hT'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \end{cases}$。本征值为 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$，本征函数为

$X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x$ （$n = 1, 2, \cdots$）。

$T_n(t) = e^{-ht}\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)$，其中 $\omega_n = \sqrt{\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 - h^2}$ （设 $h < \dfrac{\pi a}{l}$）。

则 $u(x,t) = e^{-ht}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

由 $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ 可得 $A_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx$，

$\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(B_n\omega_n - hA_n\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x = \psi(x)$，所以 $B_n = \dfrac{h}{\omega_n}A_n + \dfrac{2}{l\omega_n}\int_0^l \psi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx$。

225. 一个均匀的，各向同性的弹性方形膜，$0 \le x \le l$，$0 \le y \le l$，四周夹紧。初始形状为

$Axy(l-x)(l-y)$，初速度为 0，求解膜的横振动。

定解问题为 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{y=0} = 0, u\big|_{y=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = Axy(l-x)(l-y), \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$。设 $u(x,y,t) = X(x)w(y,t)$，则

$\dfrac{X''}{X} = \dfrac{1}{w}\left(\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\lambda$。即 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \left(\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \lambda w = 0 \end{cases}$。

设 $w(x,y) = Y(y)T(t)$，则 $\dfrac{Y''}{Y} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''}{T} + \lambda = -\mu$，

所以 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0 \\ T'' + a^2 (\lambda + \mu) T = 0 \end{cases}$。

可得 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l} \right)^2$，$X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi}{l} x$（$n = 1, 2, \cdots$）。

$\mu_m = \left(\dfrac{m\pi}{l} \right)^2$，$Y_m(y) = \sin \dfrac{m\pi}{l} y$（$m = 1, 2, \cdots$）。

$T_{mn}(t) = A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t$，其中 $\omega_{mn} = \sqrt{n^2 + m^2} \dfrac{\pi a}{l}$。

$u(x, y, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t \right) \sin \dfrac{n\pi}{l} x \sin \dfrac{m\pi}{l} y$。

由 $\left. \dfrac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ 可得 $A_{mn} = 0$。

由 $u|_{t=0} = Axy(l-x)(l-y)$ 得

$B_{mn} = \dfrac{4A}{l^2} \displaystyle\int_0^l y(l-y) \sin \dfrac{m\pi}{l} x \, dy \int_0^l x(l-x) \sin \dfrac{n\pi}{l} x \, dx = \dfrac{16Al^4}{\pi^6 m^2 n^2} \left[1 - (-1)^n \right] \left[1 - (-1)^m \right]$，

$B_{2j,2i} = 0$，$B_{2j+1,2i} = 0$，$B_{2j,2i+1} = 0$，$B_{2j+1,2i+1} = \dfrac{64Al^4}{\pi^6 (2i+1)^2 (2j+1)^2}$。

所以

$u(x, y, t) = \dfrac{64Al^4}{\pi^6} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2i+1)^2 (2j+1)^2} \sin \dfrac{(2i+1)\pi}{l} x \sin \dfrac{(2i+1)\pi}{l} y \cos \omega_{2j+1,2i+1} t$。

226. 一个均匀的，各向同性的弹性方形膜，$0 \leq x \leq l$，$0 \leq y \leq l$，四周夹紧。若初始时在

中心附近受到敲击，使得 $\left. \dfrac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} v_0, & \dfrac{l}{2} - \delta < x < \dfrac{l}{2} + \delta, \dfrac{l}{2} - \delta < y < \dfrac{l}{2} + \delta \\ 0, & \text{others} \end{cases}$，而初位移为 0。

求解膜的横振动。

同上题有 $u(x, y, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t \right) \sin \dfrac{n\pi}{l} x \sin \dfrac{m\pi}{l} y$，

其中 $\omega_{mn} = \sqrt{n^2 + m^2} \dfrac{\pi a}{l}$。

由 $u\big|_{t=0}=0$ 有 $B_{mn}=0$ 。

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\omega_{mn}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}y=\begin{cases}v_0,\dfrac{l}{2}-\delta<x<\dfrac{l}{2}+\delta,\dfrac{l}{2}-\delta<y<\dfrac{l}{2}+\delta\\0,others\end{cases}。$$

所以 $A_{mn}=\dfrac{4v_0}{l^2\omega_{mn}}\int_{l/2-\delta}^{l/2+\delta}\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx\int_{l/2-\delta}^{l/2+\delta}\sin\dfrac{m\pi}{l}xdx$

$$=\frac{16v_0}{mn\pi^2\omega_{mn}}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{m\pi\delta}{l}。$$

$A_{2j,2i}=A_{2j+1,2i}=A_{2j,2i+1}=0$ ，

$$A_{2j+1,2i+1}=\frac{(-1)^{i+j}16v_0}{(2i+1)(2j+1)\pi^2\omega_{2j+1,2i+1}}\sin\frac{(2i+1)\pi\delta}{l}\sin\frac{(2j+1)\pi\delta}{l}。$$

所以 $u(x,y,t)=\dfrac{16v_0}{\pi^2}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)(2j+1)\omega_{2j+1,2i+1}}\sin\dfrac{(2i+1)\pi\delta}{l}\sin\dfrac{(2j+1)\pi\delta}{l}$

$$\cdot\sin\frac{(2i+1)\pi}{l}x\sin\frac{(2j+1)\pi}{l}y\sin\omega_{2j+1,2i+1}t$$

227．均匀，各向同性的弹性方膜，$0\le x\le l$，$0\le y\le l$，四周夹紧。若初始时在中心附近受到敲击，使中心点得到冲量 I，而初位移为 0，试求解膜的横振动。

同 217 题，$v_0=\dfrac{I}{4\rho\delta^2}$，其中 ρ 为面密度。

$$u(x,y,t)=\frac{4I}{\pi^2\rho}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)(2j+1)\omega_{2j+1,2i+1}}\lim_{\delta\to0}\frac{\sin\dfrac{(2i+1)\pi\delta}{l}}{\delta}\lim_{\delta\to0}\frac{\sin\dfrac{(2j+1)\pi\delta}{l}}{\delta}$$

$$\cdot\sin\frac{(2i+1)\pi}{l}x\sin\frac{(2j+1)\pi}{l}y\sin\omega_{2j+1,2i+1}t$$

$$=\frac{4I}{\rho l^2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{\omega_{2j+1,2i+1}}\sin\frac{(2i+1)\pi}{l}x\sin\frac{(2j+1)\pi}{l}y\sin\omega_{2j+1,2i+1}t。$$

228．一长为 l 的均匀园杆作微小扭转振动。在振动过程中，杆的各横截面仍保持为平面而

绕杆轴扭转，轴向上不发生位移。杆的一端固定，另一端连接在圆盘上，则偏转角 θ 所满足的方程和边界条件为 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \\ \theta\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\bigg|_{x=l} = -c^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=l} \end{cases}$ ， a 和 c 均为实常数。

（1）求相应的本征值 λ_n 及本征函数 $X_n(x)$ ；（2）计算积分 $\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx$ ；

（3）计算积分 $\int_0^l X_n'(x) X_m'(x) dx$ 。

（1）设 $\theta(x,t) = X(x) T(t)$ ，则 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$ ，

$\theta\big|_{x=0} = X(0) T(t) = 0$ ，所以 $X(0) = 0$ 。

$\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\bigg|_{x=l} = X(l) T''(t) = -c^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -c^2 X'(l) T(t)$ ，所以

$X'(l) = -\dfrac{1}{c^2} X(l) \dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{a^2}{c^2} \lambda X(l)$ 。

即本征值问题为 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X'(l) = \dfrac{a^2}{c^2} \lambda X(l) \end{cases}$ 。

$\lambda \int_0^l X^2(x) dx = -\int_0^l X''(x) X(x) dx = -X'(x) X(x)\big|_0^l + \int_0^l X'^2(x) dx$

$= -X'(l) X(l) + \int_0^l X'^2(x) dx = -\dfrac{a^2}{c^2} \lambda X^2(l) + \int_0^l X'^2(x) dx$ ，

所以 $\lambda = \dfrac{\int_0^l X'^2(x) dx}{\int_0^l X^2(x) dx + \dfrac{a^2}{c^2} X^2(l)} \geq 0$ （ $X(x)$ 非恒零），若 $X'(x) = 0$ ，即 $X(x) = C$ （常

数），由 $X(0) = 0$ 知 $X(x) = 0$ ，所以一定有 $\lambda > 0$ 。

解得本征值 λ_n 为方程 $\sqrt{\lambda} \tan \sqrt{\lambda} l = \dfrac{c^2}{a^2}$ 的第 n 个正根，本征函数 $X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$ 。

（2）设 λ_n ， λ_m 分别对应 $X_n(x)$ ， $X_m(x)$ （ $n \neq m$ ），即

$\lambda_n X_n(x) = -X_n''(x)$ ， $\lambda_m X_m(x) = -X_m''(x)$ 。

第一式两边同乘 $X_m(x)$ 减去第二式两边同乘 $X_n(x)$ ，再两边积分得

$$\left(\lambda_n - \lambda_m\right)\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = \int_0^l \left[X_n(x)X_m''(x) - X_n''(x)X_m(x)\right]dx$$

$$= X_n(l)X_m'(l) - X_n'(l)X_m(l) = \frac{a^2}{c^2}\left(\lambda_m - \lambda_n\right)X_n(l)X_m(l),$$

由于 $\lambda_n \neq \lambda_m$，所以 $\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = -\frac{a^2}{c^2}X_n(l)X_m(l) = -\frac{a^2}{c^2}\sin\sqrt{\lambda_n}\,l\sin\sqrt{\lambda_m}\,l$

当 $n = m$ 时， $\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = \int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx = \frac{l}{2} - \frac{1}{2}\int_0^l \cos 2\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}\sin 2\sqrt{\lambda_n}\,l = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_n}\,l}{1 + \tan^2\sqrt{\lambda_n}\,l} = \frac{l}{2} - \frac{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^4 \lambda_n + 1\right]}\,。$$

（3） $\lambda_n\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = -\int_0^l X_n''(x)X_m(x)dx$

$$= -X_n'(l)X_m(l) + \int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx,$$

所以 $\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx = X_n'(l)X_m(l) + \lambda_n\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx$

$$= \lambda_n\left[\frac{a^2}{c^2}X_n(l)X_m(l) + \int_0^l X_n(x)X_m(x)dx\right]。$$

$n \neq m$ 时由于 $\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = -\frac{a^2}{c^2}X_n(l)X_m(l)$，所以 $\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx = 0$。

$n = m$ 时， $\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx = \lambda_n\int_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx = \lambda_n\left[\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\int_0^l \cos 2\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx\right]$

$$= \lambda_n\left\{\frac{l}{2} + \frac{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^4 \lambda_n + 1\right]}\right\}。$$

229．求解枢轴的扭转振动问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l} = -c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

由上题， $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t \right) \sin \sqrt{\lambda_n}x$ 。

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t \right) X_n'(x)$ （假设可逐项微分）。

初始条件写为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=0} = \varphi'(x), \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi'(x)$ 。

根据 $\{X_n'(x)\}$ 的正交性，可由初始条件定出系数 A_n, B_n 。

$B_n = \dfrac{1}{\lambda_n N_n} \int_0^l \varphi'(x) X_n'(x) dx = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n} N_n} \int_0^l \varphi'(x) \cos\sqrt{\lambda_n}x\, dx$ ，

$A_n = \dfrac{1}{a\sqrt{\lambda_n} \lambda_n N_n} \int_0^l \psi'(x) X_n'(x) dx = \dfrac{1}{a\lambda_n N_n} \int_0^l \psi'(x) \cos\sqrt{\lambda_n}x\, dx$ 。

其中 $N_n = \dfrac{l}{2} + \dfrac{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^4 \lambda_n + 1 \right]}$ 。

230. 求解下列定解问题： $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

分离变量得 $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\dfrac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\lambda$ 。

本征值问题 $\begin{cases} X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0, X''(0) = 0, X''(l) = 0 \end{cases}$。

$$\lambda \int_0^l X^2(x)\,dx = \int_0^l X^{(4)}(x) X(x)\,dx = X'''(x) X(x)\Big|_0^l - \int_0^l X^{(3)}(x) X'(x)\,dx$$

$$= -X''(x) X'(x)\Big|_0^l + \int_0^l X''^2(x)\,dx = \int_0^l X''^2(x)\,dx,$$

所以 $\lambda = \dfrac{\displaystyle\int_0^l X''^2(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^l X^2(x)\,dx} > 0$。

X 的通解为 $X(x) = C_1 \operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}x + C_2 \operatorname{ch}\sqrt[4]{\lambda}x + C_3 \sin\sqrt[4]{\lambda}x + C_4 \cos\sqrt[4]{\lambda}x$，

由 $X(0) = 0, X''(0) = 0$ 可得 $C_2 = C_4 = 0$，再由 $X(l) = 0, X''(l) = 0$ 可得

$\begin{cases} C_1 \operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l + C_3 \sin\sqrt[4]{\lambda}l = 0 \\ C_1 \operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l - C_3 \sin\sqrt[4]{\lambda}l = 0 \end{cases}$，两式相加得 $C_1 \operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l = 0$，因为 $\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l \neq 0$（$\lambda > 0$），所

以 $C_1 = 0$。两式相减得 $C_3 \sin\sqrt[4]{\lambda}l = 0$，可得本征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^4$（$n = 1, 2, \cdots$），

本征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

所以 $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 at + B_n \cos\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 at \right] \sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

由初始条件可得 $A_n = \dfrac{2l}{n^2\pi^2 a}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx$，$B_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx$。

231. 在矩形区域 $0 < x < a$，$-\dfrac{b}{2} < y < \dfrac{b}{2}$ 上求解：（1）$\nabla^2 u = -2$，（2）$\nabla^2 u = -x^2 y$，而 u 在边界上数值为 0。

（1）可设方程的一个特解为 $v(x)$，则 $v''(x) = -2$，使之满足齐次边界条件可解得

$v = x(a - x)$，令 $u = v + w$，则 $\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{x=0} = 0, w|_{x=a} = 0 \\ w|_{y=-b/2} = -x(a - x), w|_{y=b/2} = -x(a - x) \end{cases}$。

可得 $w = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y + B_n \operatorname{ch}\dfrac{n\pi}{a}y \right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x$，

由 y 的边界条件可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x = -x(a-x) ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x = -x(a-x) 。$$

两式相减可得 $A_n = 0$，两式相加可得

$$B_n = \frac{2}{a \operatorname{ch} \dfrac{n\pi b}{2a}} \int_0^a x(x-a) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx = \frac{4a^2}{n^3 \pi^3 \operatorname{ch} \dfrac{n\pi b}{2a}} \left[(-1)^n - 1 \right] ,$$

$$B_{2k} = 0 , \quad B_{2k+1} = -\frac{8a^2}{(2k+1)^3 \pi^3 \operatorname{ch} \dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}} 。$$

所以 $w(x,t) = -\dfrac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}} \operatorname{ch} \dfrac{(2k+1)\pi}{a} y \sin \dfrac{(2k+1)\pi}{a} x ,$

$$u(x,t) = x(a-x) + w(x,t)$$

$$= x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}} \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi}{a} y \sin \frac{(2k+1)\pi}{a} x 。$$

（2）将非齐次项 $-x^2 y$ 按 x 的本征函数展开，即 $-x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y) \sin \dfrac{n\pi}{a} x$,

可得 $g_n(y) = -\dfrac{2}{a} \int_0^a x^2 y \sin \dfrac{n\pi}{a} x \, dx = \dfrac{2a^2}{n\pi} \left\{ (-1)^n + \dfrac{2}{n^2\pi^2} \left[1 - (-1)^n \right] \right\} y$,

设 $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \dfrac{n\pi}{a} x$, 代入方程得

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 Y_n(y) \sin \frac{n\pi}{a} x + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n''(y) \sin \frac{n\pi}{a} x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y) \sin \frac{n\pi}{a} x ,$$

所以 $\begin{cases} Y_n''(y) - \left(\dfrac{n\pi}{a} \right)^2 Y_n(y) = g_n(y) \\ Y_n\left(-\dfrac{b}{2} \right) = 0, Y_n\left(\dfrac{b}{2} \right) = 0 \end{cases}$ 。

解得 $Y_n(y) = \dfrac{2a^4}{n^3\pi^3}\left\{(-1)^n + \dfrac{2}{n^2\pi^2}\Big[1-(-1)^n\Big]\right\}\left(\dfrac{b}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a}} - y\right)$ 。

所以 $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin\dfrac{n\pi}{a}x = \dfrac{2a^4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\left(\dfrac{b}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a}} - y\right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x$

$$+\dfrac{4a^4}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^5}\Big[1-(-1)^n\Big]\left(\dfrac{b}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a}} - y\right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x \text{ 。}$$

后一项 n 只取奇数，则

$$u(x,y) = \dfrac{2a^4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\left(\dfrac{b}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a}} - y\right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x$$

$$+\dfrac{8a^4}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^5}\left[\dfrac{b}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{2a}} - y\right]\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{a}x \text{ 。}$$

232．求解：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = bx(l-x) \\[2mm] u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=l} = 0 \\[2mm] u\big|_{t=0} = 0,\, \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 。

设方程一个特解为 $v(x)$，则 $v'' = -\dfrac{b}{a^2}x(l-x)$，使之满足齐次边界条件，解之得

$v = \dfrac{b}{12a^2}x(x^3 - 2lx^2 + l^3)$。设 $u = v + w$，则 w 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\[2mm] w\big|_{x=0} = 0,\, w\big|_{x=l} = 0 \\[2mm] w\big|_{t=0} = -\dfrac{b}{12a^2}x(x^3 - 2lx^2 + l^3),\, \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \text{ 。}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\dfrac{n\pi}{l}at + B_n\cos\dfrac{n\pi}{l}at\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x \text{ ，}$$

$$A_n = 0，\quad B_n = -\frac{b}{6a^2 l}\int_0^l x\left(x^3 - 2lx^2 + l^3\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{4l^4 b}{n^5\pi^5 a^2}\left[(-1)^n - 1\right]，$$

所以 $u(x,t) = \dfrac{b}{12a^2}x\left(x^3 - 2lx^2 + l^3\right)$

$$-\frac{8l^4 b}{\pi^5 a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}at\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x。$$

233．解第 202 题。
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\[2mm] u\big|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \dfrac{P}{E} \\[2mm] u\big|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\end{cases}$$

设 $v = \dfrac{P}{E}x$，令 $u = v + w$，则
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\[2mm] w\big|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \\[2mm] w\big|_{t=0} = -\dfrac{P}{E}x,\ \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\end{cases}。$$

可得 $w(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t + B_n\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x。$

由 $\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ 可得 $A_n = 0$。

由 $w\big|_{t=0} = -\dfrac{P}{E}x$ 可得 $B_n = -\dfrac{2P}{El}\displaystyle\int_0^l x\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\,dx = -\dfrac{8Pl(-1)^2}{(2n+1)^2\pi^2 E}。$

所以 $u(x,t) = \dfrac{P}{E}x - \dfrac{8Pl}{\pi^2 E}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x。$

234．一细长杆，$x = 0$ 端固定，$x = l$ 端受周期力 $A\sin\omega t$ 作用。求解此杆的纵振动，设初位移及初速度均为 0。

见 206 题，该定解问题为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\[2mm] u\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \dfrac{A}{ES}\sin \omega t \text{。} \\[2mm] u\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

设 $v(x,t) = f(x)\sin \omega t$ 满足方程和边界条件，则 $\begin{cases} f''(x) + \dfrac{\omega^2}{a^2} f(x) = 0 \\[2mm] f(0) = 0, f'(l) = \dfrac{A}{ES} \end{cases}$ ，解之得

$$v(x,t) = \dfrac{Aa}{ES\omega} \dfrac{\sin \dfrac{\omega}{a} x}{\cos \dfrac{\omega}{a} l} \sin \omega t \text{。}$$

令 $u = v + w$ ，则 w 满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\[2mm] w\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0 \\[2mm] w\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\dfrac{Aa}{ES\cos \dfrac{\omega}{a} l} \sin \dfrac{\omega}{a} x \end{cases}$ 。

可得 $w = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \sin \dfrac{2n+1}{2l} a\pi t + B_n \cos \dfrac{2n+1}{2l} a\pi t \right) \sin \dfrac{2n+1}{2l} \pi x$ ，

$B_n = 0$ ，

$$A_n = -\dfrac{4A}{\pi ES(2n+1)\cos \dfrac{\omega}{a} l} \int_0^l \sin \dfrac{\omega}{a} x \sin \dfrac{2n+1}{2l} \pi x \, dx$$

$$= \dfrac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos \dfrac{\omega}{a} l} \int_0^l \left[\cos\left(\dfrac{\omega}{a} + \dfrac{2n+1}{2l}\pi \right) x - \cos\left(\dfrac{\omega}{a} - \dfrac{2n+1}{2l}\pi \right) x \right] dx$$

$$= \dfrac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos \dfrac{\omega}{a} l} \left[\dfrac{(-1)^n}{\dfrac{\omega}{a} + \dfrac{2n+1}{2l}\pi} \cos \dfrac{\omega}{a} l - \int_0^l \cos\left(\dfrac{\omega}{a} - \dfrac{2n+1}{2l}\pi \right) x \, dx \right] \text{。}$$

若不存在正整数 m ，使得 $\dfrac{\omega}{a} = \dfrac{2m+1}{2l}\pi$ ，则

$$A_n = \frac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos\dfrac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^n}{\dfrac{\omega}{a}+\dfrac{2n+1}{2l}\pi}\cos\frac{\omega}{a}l + \frac{(-1)^n}{\dfrac{\omega}{a}-\dfrac{2n+1}{2l}\pi}\cos\frac{\omega}{a}l\right]$$

$$= \frac{4A\omega}{\pi ESa(2n+1)}\frac{(-1)^n}{\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2-\left(\dfrac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\text{。}$$

所以 $u(x,t) = \dfrac{Aa}{ES\omega}\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{a}x}{\cos\dfrac{\omega}{a}l}\sin\omega t$

$$+ \frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2-\left(\dfrac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\text{。}$$

若存在正整数 m，使得 $\dfrac{\omega}{a}=\dfrac{2m+1}{2l}\pi$，则当 $n\neq m$ 时，仍有

$$A_n = \frac{4A\omega}{\pi ESa(2n+1)}\frac{(-1)^n}{\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2-\left(\dfrac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\text{，}$$

当 $n=m$ 时，$A_m = \dfrac{Aa}{ESl\omega\cos\dfrac{\omega}{a}l}\left[\dfrac{(-1)^m a}{2\omega}\cos\dfrac{\omega}{a}l - l\right]$，

所以 $u(x,t) = \dfrac{Aa}{ES\omega}\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{a}x}{\cos\dfrac{\omega}{a}l}\sin\omega t + A_m\sin\omega t\sin\dfrac{\omega}{a}x + \sum_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{\infty}A_n\sin\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x$

$$= \frac{Aa}{ES\omega}\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}x}{\cos\dfrac{\omega}{a}l}\sin\omega t + \frac{Aa}{ESl\omega\cos\dfrac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^m a}{2\omega}\cos\frac{\omega}{a}l - l\right]\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t$$

$$+ \frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2-\left(\dfrac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

$$= \frac{(-1)^m Aa^2}{2ESl\omega^2}\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t$$

$$+\frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2-\left(\dfrac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x。$$

235．求下列定解问题之解：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\[2mm]u\big|_{x=0}=\cos\dfrac{\pi}{l}at,\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0\\[2mm]u\big|_{t=0}=\cos\dfrac{\pi}{l}x,\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\sin\dfrac{\pi}{2l}x\end{cases}。$$

设 $v(x,t)=f(x)\cos\dfrac{\pi}{l}at$ 满足方程和边界条件，解得 $v(x,t)=\cos\dfrac{\pi}{l}x\cos\dfrac{\pi}{l}at$。

令 $u=v+w$，则 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\[2mm]w\big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0\\[2mm]w\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\sin\dfrac{\pi}{2l}x\end{cases}。$

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t+B_n\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x，$$

$B_n=0$，$A_n=\dfrac{4}{(2n+1)a\pi}\displaystyle\int_0^l\sin\frac{1}{2l}\pi x\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x dx$。

$A_0=\dfrac{2l}{a\pi}$，$A_n=0$（$n=1,2,\cdots$）。

所以 $u(x,t)=\cos\dfrac{\pi}{l}x\cos\dfrac{\pi}{l}at+\dfrac{2l}{a\pi}\sin\dfrac{\pi}{2l}at\sin\dfrac{\pi}{2l}x$。

236．求解下列定解问题：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\[2mm]u\big|_{x=0}=Ae^{-\alpha^2\kappa t},u\big|_{x=l}=Be^{-\beta^2\kappa t}\\[2mm]u\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

设 $v(x,t)=Af(x)e^{-\alpha^2\kappa t}+Bg(x)e^{-\beta^2\kappa t}$ 满足方程和边界条件，解得

$$v(x,t) = A\frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}e^{-\alpha^2\kappa t} + B\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}e^{-\beta^2\kappa t}。$$

令 $u = v + w$，则
$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\\ w\big|_{x=0} = 0, w\big|_{x=l} = 0\\ w\big|_{t=0} = -A\dfrac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l} - B\dfrac{\sin\beta x}{\sin\beta l}\end{cases}。$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t},$$

$$C_n = -\frac{2A}{l\sin\alpha l}\int_0^l \sin\alpha(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx - \frac{2B}{l\sin\beta l}\int_0^l \sin\beta x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$= -\frac{2A}{l}\int_0^l \cos\alpha x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx + \frac{2A}{l}\cot\alpha l\int_0^l \sin\alpha x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx - \frac{2B}{l\sin\beta l}\int_0^l \sin\beta x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$= -\frac{2An\pi}{(n\pi)^2 - (\alpha l)^2}\left[1 - (-1)^n\cos\alpha l\right] - \frac{2An\pi(-1)^n}{(n\pi)^2 - (\alpha l)^2}\cos\alpha l + \frac{2(-1)^n n\pi B}{(n\pi)^2 - (\beta l)^2}$$

$$= -\frac{2An\pi}{(n\pi)^2 - (\alpha l)^2} + \frac{2(-1)^n n\pi B}{(n\pi)^2 - (\beta l)^2}。$$

上面假设不存在正整数 n, m，使 $n\pi = \alpha l$，$m\pi = \beta l$。

$$u(x,t) = A\frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}e^{-\alpha^2\kappa t} + B\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}e^{-\beta^2\kappa t}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi\left[\frac{A}{(n\pi)^2 - (\alpha l)^2} - \frac{(-1)^n B}{(n\pi)^2 - (\beta l)^2}\right]\sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}。$$

237．求解矩形区域内的第一类边值问题：
$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0\\ u\big|_{x=0} = \varphi_1(y), u\big|_{x=a} = \varphi_2(y)\\ u\big|_{y=0} = \psi_1(x), u\big|_{y=b} = \psi_2(x)\end{cases}。$$

设 $u = v + w$，其中 v, w 分别满足

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=a} = 0 \\ v|_{y=0} = \psi_1(x), v|_{y=b} = \psi_2(x) \end{cases} , \quad \begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{x=0} = \varphi_1(y), w|_{x=a} = \varphi_2(y) \text{。} \\ w|_{y=0} = 0, w|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x ,$$

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx ,$$

$$A_n = -B_n \coth \frac{n\pi b}{a} + \frac{2}{a \operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx \text{。}$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x + D_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x \right) \sin \frac{n\pi}{b} y ,$$

$$D_n = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy ,$$

$$C_n = -D_n \coth \frac{n\pi a}{b} + \frac{2}{b \operatorname{sh} \dfrac{n\pi a}{b}} \int_0^b \varphi_2(y) \sin \frac{n\pi}{a} y \, dy \text{。}$$

238．求矩形区域 $0 \le x \le a$，$0 \le y \le b$ 内满足边界条件 $\begin{cases} u|_{x=0} = Ay(b-y), u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = B \sin \dfrac{\pi}{a} x, u|_{y=b} = 0 \end{cases}$ 的调

和函数。

由上题结论， $B_n = \dfrac{2B}{a} \int_0^a \sin \dfrac{\pi}{a} x \sin \dfrac{n\pi}{a} x \, dx$，$B_1 = B$，$B_n = 0$（$n=1,2,\cdots$）。

$A_n = -B_n \coth \dfrac{n\pi b}{a}$，$A_1 = -B \coth \dfrac{\pi b}{a}$，$A_n = 0$（$n=1,2,\cdots$）。

$D_n = \dfrac{2A}{b} \int_0^b y(b-y) \sin \dfrac{n\pi}{b} y \, dy = \dfrac{4Ab^2}{n^3 \pi^3} \left[1 - (-1)^n \right]$，$D_{2k} = 0$，$D_{2k+1} = \dfrac{8Ab^2}{(2k+1)^3 \pi^3}$ 。

$C_n = -D_n \coth \dfrac{n\pi a}{b}$，$C_{2k} = 0$，$C_{2k+1} = -\dfrac{8Ab^2}{(2k+1)^3 \pi^3} \coth \dfrac{(2k+1)\pi a}{b}$

所以 $u(x,t) = B \dfrac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi b}{a}} \sin \dfrac{\pi}{a} x$

$$+ \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3 \operatorname{sh}(2k+1)\pi a/b} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{b}(a-x) \sin \frac{(2k+1)\pi}{b} y \text{。}$$

239. 求解 204 题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\[2mm] u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = u_0 \\[2mm] u\big|_{t=0} = \dfrac{u_0}{l}x \end{cases}$$

可得一个特解 $v(x) = -\dfrac{f}{2\kappa}x^2 + \left(\dfrac{u_0}{l} + \dfrac{fl}{2\kappa}\right)x$。令 $u = v + w$，则
$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\[2mm] w\big|_{x=0} = 0,\ w\big|_{x=l} = 0 \\[2mm] w\big|_{t=0} = \dfrac{f}{2\kappa}\left(x^2 - lx\right) \end{cases}$$。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \dfrac{n\pi}{l}x\, e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}, \quad A_n = \dfrac{f}{\kappa l}\int_0^l \left(x^2 - lx\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\, dx = \dfrac{2fl^2}{\kappa n^3 \pi^3}\left[(-1)^n - 1\right],$$

$$A_{2k} = 0, \quad A_{2k+1} = -\dfrac{4fl^2}{\kappa(2k+1)^3 \pi^3}。$$

所以 $u(x,t) = -\dfrac{f}{2\kappa}x^2 + \left(\dfrac{u_0}{l} + \dfrac{fl}{2\kappa}\right)x - \dfrac{4fl^2}{\kappa\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{l}x\, e^{-\kappa\left(\frac{2k+1}{l}\pi\right)^2 t}$。

240. 竖直悬挂的一弹性杆，上端（ $x=0$ ）固定，下端（ $x=l$ ）挂有重物。杆的单位质量上受外力 $f(x)$ 作用（沿杆方向，重力包括在内）。试讨论杆的纵振动，设初始条件为

$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$， $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$。提示： $x = l$ 端的边界条件为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} + g$。

该定解问题为
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \\[2mm] u\big|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} + g \\[2mm] u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

令 $u = \dfrac{g}{c^2}x + v$，则
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x) \\[2mm] v\big|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -c^2 \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=l} \\[2mm] v\big|_{t=0} = \varphi(x) - \dfrac{g}{c^2}x,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$。

参考 228，229 题，$v = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$，其中 $X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$，

λ_n 为方程 $\sqrt{\lambda} \tan \sqrt{\lambda} l = \dfrac{c^2}{a^2}$ 的第 n 个正根。

令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$，由 $\{X_n'(x)\}$ 的正交性可得

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n N_n} \int_0^l f'(x) X_n'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} N_n} \int_0^l f'(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \, dx,$$

其中 $N_n = \dfrac{l}{2} + \dfrac{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^4 \lambda_n + 1\right]}$。

将 $v = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$ 和 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$ 代入方程得 $T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n$。 （＊）

由初始条件，$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \varphi(x) - \dfrac{g}{c^2} x$，则

$$T_n(0) = \frac{1}{\lambda_n N_n} \int_0^l \left[\varphi'(x) - \frac{g}{c^2}\right] X'(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} N_n} \int_0^l \varphi'(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \, dx - \frac{g}{\sqrt{\lambda_n} N_n c^2} \int_0^l \cos \sqrt{\lambda_n} x \, dx = \varphi_n - \frac{g}{\lambda_n N_n c^2} \sin \sqrt{\lambda_n} l \, .$$

$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \psi(x)$，则

$$T_n'(0) = \frac{1}{\lambda_n N_n} \int_0^l \psi'(x) X'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} N_n} \int_0^l \psi'(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \, dx = \psi_n \, .$$

解方程（＊）得

$$T_n(t) = \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n} t + \left(\varphi_n - \frac{g}{\lambda_n N_n c^2} \sin \sqrt{\lambda_n} l - \frac{f_n}{a^2 \lambda_n}\right) \cos a\sqrt{\lambda_n} t + \frac{f_n}{a^2 \lambda_n} \, .$$

所以 $u(x,t) = \dfrac{g}{c^2} x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n} x$。

241．求解 210 题，设初位移及初速度分别为 $\varphi(x), \psi(x)$。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \neq \dfrac{l}{2} \\[2mm] u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0, u\big|_{x=l/2-0} = u\big|_{x=l/2+0}, \dfrac{T}{M}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2} + g。 \\[2mm] u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

令 $u(x,t) = \dfrac{Mg}{2T}\left(\left|x - \dfrac{l}{2}\right| - \dfrac{l}{2}\right) + v(x,t)$，则 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, x \neq \dfrac{l}{2} \\[2mm] v\big|_{x=0} = 0, v\big|_{x=l} = 0, v\big|_{x=l/2-0} = v\big|_{x=l/2+0}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2} + c^2 \dfrac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0} = c^2 \dfrac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2}。 \\[2mm] v\big|_{t=0} = \varphi(x) - \dfrac{Mg}{2T}\left(\left|x - \dfrac{l}{2}\right| - \dfrac{l}{2}\right), \dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

其中 $c^2 = \dfrac{2T}{M}$。令 $v = v_1 + v_2$，v_1, v_2 分别满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, x \neq \dfrac{l}{2} \\[2mm] v_1\big|_{x=0} = 0, v_1\big|_{x=l} = 0, v_1\big|_{x=l/2-0} = 0, v_1\big|_{x=l/2+0} = 0, \\[2mm] 2\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2} = c^2 \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0, x \neq \dfrac{l}{2} \\[2mm] v_2\big|_{x=0} = 0, v_2\big|_{x=l} = 0, \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2} + c^2 \dfrac{\partial v_2}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0} = 0, c^2 \dfrac{\partial v_2}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0} - \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2} = 0。 \\[2mm] v_2\big|_{x=l/2-0} = v_2\big|_{x=l/2+0} \end{cases}$$

可看出 v_1 在 $\left[0, l/2\right)$ 和 $\left(l/2, 0\right]$ 上的本征函数都是 $\sin\dfrac{2n\pi}{l}x$，由条件

$$2\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2} = c^2 \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0}\right) 可知在 \left[0, l\right] \backslash \{l/2\} 上有$$

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{2n\pi}{l} at + B_n \cos \frac{2n\pi}{l} at \right) \sin \frac{2n\pi}{l} x \, 。$$

同228,229题可得 v_2 在 $[0,l] \backslash \{l/2\}$ 上的本征函数为 $X_n(x) = \begin{cases} \sin \sqrt{\lambda_n} x, 0 \le x < l/2 \\ \sin \sqrt{\lambda_n} (l-x), l/2 < x \le l \end{cases}$,

其中本征值 λ_n 为方程 $\sqrt{\lambda} \tan \dfrac{\sqrt{\lambda} l}{2} = \dfrac{c^2}{a^2}$ 的正根。

由条件 $v_2 |_{x=l/2-0} = v_2 |_{x=l/2+0}$ 可得 $v_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin \sqrt{\lambda_n} at + D_n \cos \sqrt{\lambda_n} at \right) X_n(x)$

（ $x \in [0,l] \backslash \{l/2\}$ ）。

即 $v = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{2n\pi}{l} at + B_n \cos \frac{2n\pi}{l} at \right) \sin \frac{2n\pi}{l} x$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin \sqrt{\lambda_n} at + D_n \cos \sqrt{\lambda_n} at \right) X_n(x) \, 。$$

将初始条件写成 $\dfrac{\partial v}{\partial x} \Big|_{t=0} = \begin{cases} \varphi'(x) + \dfrac{Mg}{2T}, 0 \le x < \dfrac{l}{2} \\ \varphi'(x) - \dfrac{Mg}{2T}, \dfrac{l}{2} < x \le l \end{cases}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \Big|_{t=0} = \psi'(x)$,

$\int_0^l X_n'(x) \cos \dfrac{2m\pi}{l} x \, dx = \sqrt{\lambda_n} \int_0^{l/2} \cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \dfrac{2m\pi}{l} x \, dx - \sqrt{\lambda_n} \int_{l/2}^l \cos \sqrt{\lambda_n} (l-x) \cos \dfrac{2m\pi}{l} x \, dx$

$\quad = \sqrt{\lambda_n} \int_0^{l/2} \cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \dfrac{2m\pi}{l} x \, dx - \sqrt{\lambda_n} \int_0^{l/2} \cos \sqrt{\lambda_n} y \cos \dfrac{2m\pi}{l} y \, dy = 0$,

即 $\left\{ \cos \dfrac{2n\pi}{l} x \right\}$ 与 $\{ X_n'(x) \}$ 在 $[0,l]$ 上正交。

$\int_0^l X_n'^2(x) \, dx = \int_0^{l/2} X_n'^2(x) \, dx + \int_{l/2}^l X_n'^2(x) \, dx = 2\int_0^{l/2} X_n'^2(x) \, dx$

$$= \lambda_n \left[\frac{l}{2} + \frac{\left(\dfrac{a}{c} \right)^2}{\left(\dfrac{a}{c} \right)^4 \lambda_n + 1} \right] = \lambda_n \left(\frac{l}{2} + \frac{2a^2 MT}{M^2 a^4 \lambda_n + 4T^2} \right) = \lambda_n N_n \, 。$$

由此可定出系数： $A_n = \dfrac{1}{2n^2 \pi^2 a} \int_0^l \psi'(x) \cos \dfrac{2n\pi}{l} x \, dx$,

$B_n = \dfrac{1}{n\pi} \int_0^l \varphi'(x) \cos \dfrac{2n\pi}{l} x \, dx$, $\quad C_n = \dfrac{1}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n} N_n a} \int_0^l \psi'(x) X_n'(x) \, dx$,

$$D_n = \frac{1}{\lambda_n N_n}\left[\int_0^l \varphi'(x)X_n'(x)dx + \frac{Mg}{T}\sin\frac{\sqrt{\lambda_n}\,l}{2}\right].$$

242. 考虑有界弦的阻尼振动，如果一端固定，另一端在外力作用下做周期运动，经过足够长时间后，初始条件的影响则因阻尼的作用而衰减殆尽，因而问题归结为求解无初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\[2mm] u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=A\cos\omega t\end{cases}\quad \text{的周期解，试求之。}$$

采用复数解。设 $u(x,t)=f(x)e^{i\omega t}$，原定解问题化为 $\begin{cases}f''(x)+\left[\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2 - i\dfrac{\omega h}{a^2}\right]f(x)=0 \\[2mm] f(0)=0, f(l)=A\end{cases}$。

记 $\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2 - i\dfrac{\omega h}{a^2}} = \alpha - i\beta$，可解得 $u(x,t)=A\dfrac{\sin(\alpha-i\beta)x}{\sin(\alpha-i\beta)l}e^{i\omega t}$。

取实部得

$$u(x,t)=\frac{A}{\sin^2\alpha l + \mathrm{sh}^2\beta l}\Big[\left(\sin\alpha x\sin\alpha l\,\mathrm{ch}\,\beta x\,\mathrm{ch}\,\beta l + \cos\alpha x\cos\alpha l\,\mathrm{sh}\,\beta x\,\mathrm{sh}\,\beta l\right)\cos\omega t$$

$$-\left(\sin\alpha x\cos\alpha l\,\mathrm{ch}\,\beta x\,\mathrm{sh}\,\beta l - \cos\alpha x\sin\alpha l\,\mathrm{sh}\,\beta x\,\mathrm{ch}\,\beta l\right)\sin\omega t\Big].$$

243. 热传导问题也存在无初值问题。典型的例子是地表温度的日变化或年变化向地层内传播形成的温度波。把地球设想为均匀半无界空间，试求无初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \\[2mm] u|_{x=0}=A\cos\omega t, |u|_{x\to\infty}|<\infty\end{cases}\quad \text{的周期解。}$$

设 $u=f(x)e^{i\omega t}$，则 $\begin{cases}f''(x)-\dfrac{i\omega}{\kappa}f(x)=0 \\[2mm] f(0)=A, |f(\infty)|<\infty\end{cases}$。解得 $u(x,t)=Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}(1+i)x}e^{i\omega t}$。

取实部得 $u(x,t)=Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}x}\cos\left(\sqrt{\dfrac{\omega}{2\kappa}}x - \omega t\right)$。

244．写出下列正交曲线坐标系中的 Laplace 算子：

（1）椭圆柱坐标系 (ξ,η,z)：$x=a\xi\eta$，$y=a\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}$，$z=z$；

（2）抛物线柱坐标系 (λ,μ,z)：$x=\dfrac{1}{2}\left(\lambda-\mu\right)$，$y=\sqrt{\lambda\mu}$，$z=z$；

（3）锥面坐标系 (r,λ,μ)：$x=\dfrac{r}{a}\sqrt{\left(a^2-\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)}$，$y=\dfrac{r}{b}\sqrt{\left(b^2+\lambda\right)\left(b^2-\mu\right)}$，

$z=\dfrac{r\sqrt{\lambda\mu}}{ab}$，其中 $a^2+b^2=1$；

（4）椭球坐标系 (λ,μ,ν)：$x^2=\dfrac{\left(a^2+\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)\left(a^2+\nu\right)}{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)}$，

$y^2=\dfrac{\left(b^2+\lambda\right)\left(b^2+\mu\right)\left(b^2+\nu\right)}{\left(b^2-c^2\right)\left(b^2-a^2\right)}$，$z^2=\dfrac{\left(c^2+\lambda\right)\left(c^2+\mu\right)\left(c^2+\nu\right)}{\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)}$。

（1）$dx=a\eta d\xi+a\xi d\eta$，$dy=a\dfrac{1-\eta^2}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\xi d\xi-a\dfrac{\xi^2-1}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\eta d\eta$，

$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=a^2\dfrac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}d\xi^2+a^2\dfrac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}d\eta^2+dz^2$。

即度规矩阵 $G=\begin{pmatrix} a^2\dfrac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1} & 0 & 0 \\[2mm] 0 & a^2\dfrac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2} & 0 \\[2mm] 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\sqrt{|G|}=a^2\dfrac{\xi^2-\eta^2}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}$。

$d=\dfrac{\partial}{\partial\xi}d\xi+\dfrac{\partial}{\partial\eta}d\eta+\dfrac{\partial}{\partial z}dz$，

$^*d=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}\sqrt{|G|}\dfrac{\partial}{\partial\xi}d\eta\wedge dz+\dfrac{1}{a^2}\dfrac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}\sqrt{|G|}\dfrac{\partial}{\partial\eta}dz\wedge d\xi+\sqrt{|G|}\dfrac{\partial}{\partial z}d\xi\wedge d\eta$

$=\dfrac{\xi^2-1}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\dfrac{\partial}{\partial\xi}d\eta\wedge dz+\dfrac{1-\eta^2}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\dfrac{\partial}{\partial\eta}dz\wedge d\xi+\sqrt{|G|}\dfrac{\partial}{\partial z}d\xi\wedge d\eta$，

$d^*d=\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\dfrac{\xi^2-1}{1-\eta^2}}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)d\xi\wedge d\eta\wedge dz+\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\dfrac{1-\eta^2}{\xi^2-1}}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right)d\eta\wedge dz\wedge d\xi$

$$+a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\frac{\partial}{\partial z}\right)dz \wedge d\xi \wedge d\eta$$

$$=\left[\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)+\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\sqrt{G}\,d\xi \wedge d\eta \wedge dz$$

$$\nabla^2 =\,^* d^* d=\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)+\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\text{。}$$

（2）$dx=\dfrac{1}{2}d\lambda-\dfrac{1}{2}d\mu$，$dy=\dfrac{\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}d\lambda+\dfrac{\lambda}{2\sqrt{\lambda\mu}}d\mu$，

$$ds^2 =\frac{1}{4}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)d\lambda^2+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)d\mu^2+dz^2,$$

$$G=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{\mu}{\lambda}\right) & 0 & 0 \\[2mm] 0 & \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{\lambda}{\mu}\right) & 0 \\[2mm] 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sqrt{|G|}=\frac{\lambda+\mu}{4\sqrt{\lambda\mu}}\,\text{。}$$

$$d =\frac{\partial}{\partial \lambda}d\lambda+\frac{\partial}{\partial \mu}d\mu+\frac{\partial}{\partial z}dz\,,$$

$$^* d=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\frac{\partial}{\partial \lambda}d\mu \wedge dz+\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\frac{\partial}{\partial \mu}dz \wedge d\lambda+\frac{\lambda+\mu}{4\sqrt{\lambda\mu}}\frac{\partial}{\partial z}d\lambda \wedge d\mu\,,$$

$$d^* d=\left[\frac{4\sqrt{\lambda}}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)+\frac{4\sqrt{\mu}}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{\lambda+\mu}{4\sqrt{\lambda\mu}}d\lambda d\mu \wedge dz\,,$$

$$\nabla^2 =\frac{4\sqrt{\lambda}}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)+\frac{4\sqrt{\mu}}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\text{。}$$

（3）$dx=\dfrac{1}{a}\sqrt{\left(a^2-\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)}\,dr-\dfrac{r}{2a}\sqrt{\dfrac{a^2+\mu}{a^2-\lambda}}d\lambda+\dfrac{r}{2a}\sqrt{\dfrac{a^2-\lambda}{a^2+\mu}}d\mu$，

$$dy=\frac{1}{b}\sqrt{\left(b^2+\lambda\right)\left(b^2-\mu\right)}\,dr+\frac{r}{2b}\sqrt{\frac{b^2-\mu}{b^2+\lambda}}d\lambda-\frac{r}{2b}\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{b^2-\mu}}d\lambda\,,$$

$$dz=\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{ab}dr+\frac{r}{2ab}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}d\lambda+\frac{r}{2ab}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}d\mu\,\text{。}$$

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2(\lambda+\mu)}{4\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}d\lambda^2 + \frac{r^2(\lambda+\mu)}{4\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}d\mu^2,$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r^2(\lambda+\mu)}{4\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{r^2(\lambda+\mu)}{4\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)} \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{|G|} = \frac{r^2(\lambda+\mu)}{4\sqrt{\lambda\mu(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)(a^2+\mu)(b^2-\mu)}}。$$

$$^*d = \sqrt{|G|}\frac{\partial}{\partial r}d\lambda \wedge d\mu + \sqrt{\frac{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}}\frac{\partial}{\partial \lambda}d\mu \wedge dr$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}}\frac{\partial}{\partial \mu}dr \wedge d\lambda,$$

$$d^*d = \left\{ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial \lambda}\right] \right.$$

$$\left. + \frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial \mu}\right] \right\}\sqrt{|G|}dr \wedge d\lambda \wedge d\mu$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$$

$$+ \frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)。$$

（4） $$dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}d\lambda + \frac{1}{a^2+\mu}d\mu + \frac{1}{a^2+\nu}d\nu\right),$$

$$dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}\left(\frac{1}{b^2+\lambda}d\lambda + \frac{1}{b^2+\mu}d\mu + \frac{1}{b^2+\nu}d\nu\right),$$

$$dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}\left(\frac{1}{c^2+\lambda}d\lambda + \frac{1}{c^2+\mu}d\mu + \frac{1}{c^2+\nu}d\nu\right)。$$

$$ds^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4\varphi(\lambda)}d\lambda^2 + \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4\varphi(\mu)}d\mu^2 + \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4\varphi(\nu)}d\nu^2,$$

其中 $\varphi(x)=\left(a^2+x\right)\left(b^2+x\right)\left(c^2+x\right)$。

$$\nabla^2=\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\left[(\mu-\nu)\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\right.$$

$$\left.+(\lambda-\nu)\sqrt{\varphi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\varphi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+(\lambda-\mu)\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]。$$

245．在上述各坐标系中将 Laplace 方程分离变量。

（1）令 $u(\xi,\eta,z)=v(\xi,\eta)Z(z)$，代入 $\nabla^2u=0$ 得

$$\frac{Z\sqrt{\xi^2-1}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)+\frac{Z\sqrt{1-\eta^2}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+vZ''=0，$$

两边同除 vZ 得

$$\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{a^2v\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)+\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a^2v\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=-\frac{Z''}{Z}=\lambda$$

所以 $\begin{cases}Z''+\lambda Z=0\\\sqrt{\xi^2-1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\right)+\sqrt{1-\eta^2}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\dfrac{\partial v}{\partial\eta}\right)=a^2\lambda v\left(\xi^2-\eta^2\right)\end{cases}$，

令 $v(\xi,\eta)=\Xi(\xi)\mathrm{H}(\eta)$ 代入上面第二式得

$$\mathrm{H}\sqrt{\xi^2-1}\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{d\Xi}{d\xi}\right)+\Xi\sqrt{1-\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{d\mathrm{H}}{d\eta}\right)=a^2\lambda\Xi\mathrm{H}\left(\xi^2-1+1-\eta^2\right)，$$

两边同除 $\Xi\mathrm{H}$ 得

$$\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\Xi}\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{d\Xi}{d\xi}\right)-a^2\lambda\left(\xi^2-1\right)=-\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\mathrm{H}}\frac{d}{d\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{d\mathrm{H}}{d\eta}\right)+a^2\lambda\left(1-\eta^2\right)=-\mu，$$

所以 $\begin{cases}Z''+\lambda Z=0\\\sqrt{\xi^2-1}\dfrac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\dfrac{d\Xi}{d\xi}\right)+\left[\mu-a^2\lambda\left(\xi^2-1\right)\right]\Xi=0\\\sqrt{1-\eta^2}\dfrac{d}{d\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\eta}\right)-\left[\mu+a^2\lambda\left(1-\eta^2\right)\right]\mathrm{H}=0\end{cases}$ 。

（2）令 $u(\lambda,\mu,z)=\Lambda(\lambda)\mathrm{M}(\mu)Z(z)$，代入 $\nabla^2u=0$ 得

$$\frac{4\mathrm{MZ}\sqrt{\lambda}}{\lambda+\mu}\frac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{d\Lambda}{d\lambda}\right)+\frac{4\Lambda Z\sqrt{\mu}}{\lambda+\mu}\frac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)=-\Lambda\mathrm{MZ}'',$$

两边同除 $\Lambda\mathrm{MZ}$，令它等于 σ 得

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\Lambda}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}\right)+\dfrac{\sqrt{\mu}}{\mathrm{M}}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)=\sigma\left(\dfrac{\lambda}{4}+\dfrac{\mu}{4}\right)\\ Z''+\sigma Z=0\end{cases}。$$

进一步得到
$$\begin{cases}\sqrt{\lambda}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}\right)+\left(\tau-\dfrac{\sigma}{4}\lambda\right)\Lambda=0\\[2mm]\sqrt{\mu}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)-\left(\tau+\dfrac{\sigma}{4}\mu\right)\mathrm{M}=0\\[2mm]Z''+\sigma Z=0\end{cases}。$$

（3）$u(r,\lambda,\mu)=R(r)\Lambda(\lambda)\mathrm{M}(\mu)$，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Lambda}\sqrt{\lambda\left(a^2-\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda\left(a^2-\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}\right)\\[2mm]+\dfrac{1}{\mathrm{M}}\sqrt{\mu\left(a^2+\mu\right)\left(b^2-\mu\right)}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu\left(a^2+\mu\right)\left(b^2-\mu\right)}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)=\sigma\left(\dfrac{\lambda}{4}+\dfrac{\mu}{4}\right)\\[2mm]\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)+\sigma R=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{\lambda\left(a^2-\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda\left(a^2-\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}\right)+\left(\tau-\dfrac{\sigma}{4}\lambda\right)\Lambda=0\\[2mm]\sqrt{\mu\left(a^2+\mu\right)\left(b^2-\mu\right)}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu\left(a^2+\mu\right)\left(b^2-\mu\right)}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)-\left(\tau+\dfrac{\sigma}{4}\mu\right)\mathrm{M}=0\\[2mm]\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)+\sigma R=0\end{cases}$$

（4）$u(\lambda,\mu,\nu)=\Lambda(\lambda)\mathrm{M}(\mu)\mathrm{N}(\nu)$，记 $L_\sigma(\Sigma)=\sqrt{\varphi(\sigma)}\dfrac{d}{d\sigma}\left(\sqrt{\varphi(\sigma)}\dfrac{d\Sigma}{d\sigma}\right)$，则

$$\frac{\mu}{(\lambda-\mu)\Lambda}L_\lambda(\Lambda)+\frac{\lambda}{(\lambda-\mu)\mathrm{M}}L_\mu(\mathrm{M})-\nu\left[\frac{1}{(\lambda-\mu)\mathrm{M}}L_\mu(\mathrm{M})+\frac{1}{(\lambda-\mu)\Lambda}L_\lambda(\Lambda)\right]=-\frac{1}{\mathrm{N}}L_\nu(\mathrm{N})$$

令 $\dfrac{\mu}{(\lambda-\mu)\Lambda}L_\lambda(\Lambda)+\dfrac{\lambda}{(\lambda-\mu)\mathrm{M}}L_\mu(\mathrm{M})=\tau$ ，　　　　　　　　　　　（a）

$$\frac{1}{(\lambda-\mu)\mathrm{M}}L_\mu(\mathrm{M})+\frac{1}{(\lambda-\mu)\Lambda}L_\lambda(\Lambda)=\sigma,\qquad\qquad\qquad (b)$$

则 $\tau-\sigma\nu=-\dfrac{1}{\mathrm{N}}L_\nu(\mathrm{N})$。

（a）$-\lambda\times$（b）得 $-\dfrac{L_\lambda(\Lambda)}{\Lambda}=\tau-\sigma\lambda$，

（a）$-\mu\times$（b）得 $\dfrac{L_\mu(\mathrm{M})}{\mathrm{M}}=\tau-\sigma\mu$。

即 $\begin{cases}L_\lambda(\Lambda)+(\tau-\sigma\lambda)\Lambda=0\\L_\mu(\mathrm{M})+(-\tau+\sigma\mu)\mathrm{M}=0\\L_\nu(\mathrm{N})+(\tau-\sigma\nu)\mathrm{N}=0\end{cases}$。

246．一无穷长空心圆柱导体，分成两半，互相绝缘。一半电势为 V，另一半为 $-V$，求柱内电势分布。
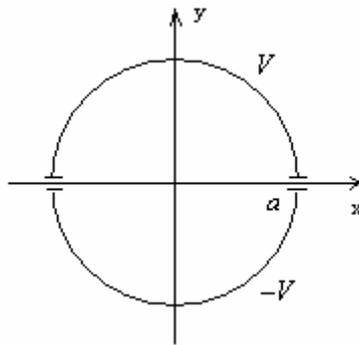
在极坐标系下令 $u(\rho,\varphi)=\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi)$ 对 Laplace 方程分离变量得

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\\rho\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)-\lambda\mathrm{P}=0\end{cases}。$$

本征值问题 $\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\\Phi(-\pi)=\Phi(\pi),\Phi'(-\pi)=\Phi'(\pi)\end{cases}$，

可得 $\lambda=n^2$（$n=0,1,2,\cdots$），本征函数 1，$\cos n\varphi$，$\sin n\varphi$（$n=1,2,\cdots$）。

做代换 $\rho=e^t$，则有 $\rho\dfrac{d}{d\rho}=\dfrac{d}{dt}$，则 P 的方程化为 $\dfrac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}-\lambda\mathrm{P}=0$。

当 $\lambda=0$ 时，解得 $\mathrm{P}_0=A+Bt=A+B\ln\rho$，

当 $\lambda > 0$ 时，解得 $P_n = C_n e^{nt} + D_n e^{-nt} = C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}$。

所以 $u(\rho, \varphi) = A + B \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \rho^n + D_n \rho^{-n} \right) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \rho^n + F_n \rho^{-n} \right) \sin n\varphi$。

由于 $u(0, \varphi)$ 为有限值，所以 $B = 0$，$D_n = 0$，$F_n = 0$，即

$$u(\rho, \varphi) = A + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \rho^n \sin n\varphi。$$

边界条件为 $u(a, \varphi) = \begin{cases} -V, -\pi < \varphi < 0 \\ V, 0 < \varphi < \pi \end{cases}$。

将上面右边函数在 $[-\pi, \pi]$ 上展开为 Fourier 级数，则 $u(a, \varphi) = \dfrac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\varphi$。

由此可定出系数 $A = 0$，$C_n = 0$，$E_{2k} = 0$，$E_{2k+1} = \dfrac{4V}{\pi} \dfrac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$。

所以 $u(\rho, \varphi) = \dfrac{4V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k+1} \left(\dfrac{\rho}{a} \right)^{2k+1} \sin(2k+1)\varphi$。

247．半径为 a，表面熏黑的均匀长圆柱，平放在地上，受到阳光照射，其垂直于光线的单位面积上单位时间内吸收热量为 M，同时，柱面按牛顿冷却定律向外散热，外界温度为 0。试求柱内温度分布。
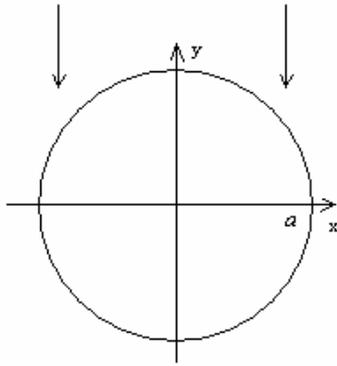
类似于习题 11 第 208 题的讨论，可得该定解问题为 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + hu \right)_{\rho=a} = \begin{cases} 0, -\pi < \varphi < 0 \\ \dfrac{M}{k} \sin\varphi, 0 < \varphi < \pi \end{cases} \end{cases}$。

同上题可得 $u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^n \sin n\varphi$。

边界条件写成 Fourier 级数：$\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+hu\right)\bigg|_{\rho=a}=\dfrac{M}{\pi k}+\dfrac{M}{2k}\sin\varphi-\dfrac{2M}{\pi k}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{4m^2-1}\cos 2m\varphi$ 。

即 $A_0 h+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n a^n\left(\dfrac{n}{a}+h\right)\cos n\varphi+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n a^n\left(\dfrac{n}{a}+h\right)\sin n\varphi$

$$=\dfrac{M}{\pi k}+\dfrac{M}{2k}\sin\varphi-\dfrac{2M}{\pi k}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{4m^2-1}\cos 2m\varphi ,$$

可得 $A_0=\dfrac{M}{\pi hk}$ ， $A_{2m+1}=0$ （ $m=0,1,2,\cdots$ ）， $A_{2m}=-\dfrac{2M}{\pi k}\dfrac{1}{a^{2m}\left(\dfrac{2m}{a}+h\right)}\dfrac{1}{4m^2-1}$

（$m=1,2,\cdots$）, $B_1=\dfrac{M}{2k}\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}+h\right)a}$, $B_n=0$ （ $n=2,3,\cdots$ ）。

所以 $u(\rho,\varphi)=\dfrac{M}{\pi hk}+\dfrac{M}{2k\left(\dfrac{1}{a}+h\right)}\dfrac{\rho}{a}\sin\varphi-\dfrac{2M}{\pi k}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{2m}{a}+h\right)(4m^2-1)}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{2m}\cos 2m\varphi$ 。

248．求环形区域 $a\leq\rho\leq b$ 内满足边界条件 $u\big|_{\rho=a}=f(\varphi)$ ， $u\big|_{\rho=b}=g(\varphi)$ 的调和函数。

$$u(\rho,\varphi)=A+B\ln\rho+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(E_n\rho^n+F_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi 。$$

令 $f(\varphi)=f_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{sn}\sin n\varphi+f_{cn}\cos n\varphi$, $g(\varphi)=g_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_{sn}\sin n\varphi+g_{cn}\cos n\varphi$ ， 则

$$A+B\ln a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(C_n a^n+D_n a^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(E_n a^n+F_n a^{-n}\right)\sin n\varphi$$

$$=f_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{sn}\sin n\varphi+f_{cn}\cos n\varphi ,$$

$$A+B\ln b+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(C_n b^n+D_n b^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(E_n b^n+F_n b^{-n}\right)\sin n\varphi$$

$$=g_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_{sn}\sin n\varphi+g_{cn}\cos n\varphi 。$$

比较系数得 $A = \dfrac{f_0 \ln b - g_0 \ln a}{\ln b - \ln a}$, $B = \dfrac{g_0 - f_0}{\ln b - \ln a}$, $C_n = \dfrac{g_{cn} a^{-n} - f_{cn} b^{-n}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$,

$D_n = \dfrac{f_{cn} b^n - g_{cn} a^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$, $E_n = \dfrac{g_{sn} a^{-n} - f_{sn} b^{-n}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$, $F_n = \dfrac{f_{sn} b^n - g_{sn} a^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$。

所以 $u(\rho,\varphi) = \dfrac{g_0 \ln \dfrac{\rho}{a} + f_0 \ln \dfrac{b}{\rho}}{\ln b - \ln a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{\rho}\right)^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n} g_{cn} + \dfrac{\left(\dfrac{b}{\rho}\right)^n - \left(\dfrac{\rho}{b}\right)^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n} f_{cn} \right]\cos n\varphi$

$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{\rho}\right)^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n} g_{sn} + \dfrac{\left(\dfrac{b}{\rho}\right)^n - \left(\dfrac{\rho}{b}\right)^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n} f_{sn} \right]\sin n\varphi$。

249. 求扇形区域 $0 \le \rho \le a$，$0 \le \varphi \le \alpha$ 内的稳定温度分布。设区域内无热源，在扇形的直边上温度为 0，而在弧形边界上温度为 $f(\varphi)$。

可得本征值问题 $\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = 0, \Phi(\alpha) = 0 \end{cases}$，本征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\right)^2$，本征函数 $\Phi_n(\varphi) = \sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi$

（$n = 1, 2, \cdots$），$P(\rho) = A_n \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} + B_n \rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$，所以 $u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi$。

$u(a,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi = f(\varphi)$，则 $A_n = \dfrac{2}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi d\varphi$，

$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi$，其中 $A_n' = \dfrac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi d\varphi$。

250. 讨论上题中 $f(\varphi) = A$（常数）且 $\alpha = 2\pi$ 的情况，证明沿正实轴：

（1）当 $\varphi \to 0$ 及 $\varphi \to 2\pi$ 时温度分布连续；

（2）当 $\varphi \to 0$ 及 $\varphi \to 2\pi$ 时温度梯度 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ 不连续。

$$A_n' = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\frac{n}{2}\varphi \, d\varphi = \frac{2A}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right], \quad A_{2k}' = 0, \quad A_{2k+1}' = \frac{4A}{\pi n},$$

$$u(\rho,\varphi) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2k+1}{2}} \sin\frac{2k+1}{2}\varphi \text{。}$$

当 $\varphi \to 0$ 及 $\varphi \to 2\pi$ 时都有 $u(\rho,\varphi) \to 0$，即温度连续。

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{2A}{\pi\sqrt{a\rho}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^k \cos\frac{2k+1}{2}\varphi,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = \frac{2A}{\pi}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\frac{1}{a-\rho}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=2\pi} = -\frac{2A}{\pi}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\frac{1}{a-\rho}, \quad \text{即温度梯度不连续。}$$

251. 在圆域 $0 \le \rho \le a$ 上求解：（1）$\begin{cases} \nabla^2 u = -4 \\ u|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} \nabla^2 u = -4\rho\sin\varphi \\ u|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} \nabla^2 u = -4\rho^2\sin2\varphi \\ u|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$。

（1）设特解只是 ρ 的函数，可解出一个特解 $-\rho^2$。令 $u = -\rho^2 + v$，则 $\begin{cases} \nabla^2 v = 0 \\ v|_{\rho=a} = a^2 \end{cases}$。

$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\rho^n\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\rho^n\sin n\varphi$，由边界条件得 $v = a^2$，所以 $u = a^2 - \rho^2$。

（2）设特解具有形式 $\rho^3 f(\varphi)$，代入方程得 $f''(\varphi) + 9f(\varphi) = -4\sin\varphi$，设

$f(\varphi) = A\sin\varphi$，可得一个特解 $v = -\frac{1}{2}\rho^3\sin\varphi$。

令 $u = v + w$，则 $\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{\rho=a} = \frac{1}{2}a^3\sin\varphi \end{cases}$，$w = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\rho^n\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\rho^n\sin n\varphi$，

由边界条件得 $A_n = 0$（$n = 0,1,2,\cdots$），$B_1 = \frac{1}{2}a^2$，$B_n = 0$（$n = 2,3,\cdots$），

即 $w = \frac{1}{2}a^2\rho\sin\varphi$，所以 $u = \frac{1}{2}(a^2 - \rho^2)\rho\sin\varphi$。

（3）设特解具有形式 $\rho^4 f(\varphi)$，则 $f''(\rho) + 16f(\rho) = -4\sin2\varphi$，可得一个特解

$v = -\frac{1}{3}\rho^4\sin2\varphi$，令 $u = v + w$，则 $\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{\rho=a} = \frac{1}{3}a^4\sin2\varphi \end{cases}$，可得 $u = \frac{1}{3}(a^2 - \rho^2)\rho^2\sin2\varphi$。

252. 一个由理想导体做成的无穷长波导管，其截面均匀，如下图所示。管内为真空，假定一个平面（即图中一条直边）电势为 V ，其余面上电势为 0。试求波导管内电势分布。
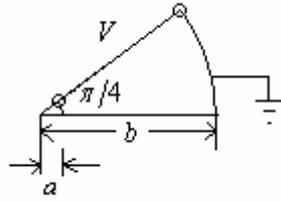
定解问题为 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u\big|_{\varphi=0} = 0, u\big|_{\varphi=\pi/4} = V \\ u\big|_{\rho=b} = 0, u\big|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$ 。满足 φ 的边界条件的一个特解为 $\dfrac{4V}{\pi}\varphi$ ，

设 $u = \dfrac{4V}{\pi}\varphi + v$ ，则 $\begin{cases} \nabla^2 v = 0 \\ v\big|_{\varphi=0} = 0, v\big|_{\varphi=\pi/4} = 0 \\ v\big|_{\rho=b} = -\dfrac{4V}{\pi}\varphi, v\big|_{\rho=a} = -\dfrac{4V}{\pi}\varphi \end{cases}$ ，

$v = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{4n} + B_n\rho^{-4n}\right)\sin 4n\varphi$ ，由边界条件解得 $A_n = \dfrac{2V}{\pi}\dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{a^{-4n} - b^{-4n}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{4n} - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{4n}}$ ，

$B_n = \dfrac{2V}{\pi}\dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{b^{4n} - a^{4n}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{4n} - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{4n}}$ ，

即 $u = \dfrac{4V}{\pi}\varphi + \dfrac{2V}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{4n} - \left(\dfrac{a}{\rho}\right)^{4n} + \left(\dfrac{b}{\rho}\right)^{4n} - \left(\dfrac{\rho}{b}\right)^{4n}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{4n} - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{4n}}\sin 4n\varphi$ 。

253. 求解球内定解问题：$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\kappa}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \\ u\big|_{r=0} \text{ 有界}, u\big|_{r=1} = Ae^{-(p\pi)^2\kappa t} \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 。提示：$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$ 。

先假定 p 不是整数，设特解具有形式 $A\dfrac{f(r)}{r}e^{-(p\pi)^2\kappa t}$ ，则 $\begin{cases} f''(r) + (p\pi)^2 f(r) = 0 \\ f(0) = 0,\ f(1) = 1 \end{cases}$ ，可

得一个特解 $v = A \dfrac{\sin p\pi r}{r \sin p\pi} e^{-(p\pi)^2 \kappa t}$。令 $u = v + w$，则 $\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\kappa}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(rw) = 0 \\ w\big|_{r=0} \text{ 有界}, \ w\big|_{r=1} = 0 \\ w\big|_{t=0} = -A \dfrac{\sin p\pi r}{r \sin p\pi} \end{cases}$。

分离变量可得本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2}{dr^2}(rR) + \dfrac{\lambda}{\kappa}(rR) = 0 \\ rR\big|_{r=0} = 0, \ rR\big|_{r=1} = 0 \end{cases}$，解得本征值 $\lambda_n = \kappa(n\pi)^2$，本征函数

$R_n(r) = \dfrac{\sin n\pi r}{r}$（$n = 1, 2, \cdots$）。$w = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\sin n\pi r}{r} e^{-\kappa(n\pi)^2 t}$，由初始条件可得

$A_n = \dfrac{2A}{\pi} \dfrac{(-1)^n n}{n^2 - p^2}$，所以 $u = A \dfrac{\sin p\pi r}{r \sin p\pi} e^{-(p\pi)^2 \kappa t} + \dfrac{2A}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2 - p^2} \dfrac{\sin n\pi r}{r} e^{-(n\pi)^2 \kappa t}$。

若 p 是整数（$= m$），u 写成

$$u = \dfrac{A}{r} \lim_{p \to m} \left[\dfrac{\sin p\pi r}{\sin p\pi} e^{-(p\pi)^2 \kappa t} + \dfrac{2}{\pi} \dfrac{(-1)^m m \sin m\pi r}{m^2 - p^2} e^{-(m\pi)^2 \kappa t} \right]$$

$$+ \dfrac{2A}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2 - m^2} \dfrac{\sin n\pi r}{r} e^{-(n\pi)^2 \kappa t}$$

上面的极限式

$$= \lim_{p \to m} \dfrac{\left[\pi \sin p\pi r (m+p) e^{-(p\pi)^2 \kappa t} - 2(-1)^m m \sin m\pi r \dfrac{\sin p\pi}{p - m} e^{-(m\pi)^2 \kappa t} \right] \Big/ (p-m)}{\pi \dfrac{\sin p\pi}{p - m}(m + p)}$$

$$= \dfrac{\dfrac{d}{dp}\left[\pi \sin p\pi r (m+p) e^{-(p\pi)^2 \kappa t} \right]_{p=m}}{\pi(m+p)\dfrac{d}{dp}\sin p\pi \bigg|_{p=m}}$$

$$= (-1)^m \left(\dfrac{\sin m\pi r}{2m\pi} + r\cos m\pi r - 2m\pi\kappa t \sin m\pi r \right) e^{-(m\pi)^2 \kappa t},$$

所以 $u = (-1)^m A \left(\dfrac{\sin m\pi r}{2m\pi r} + \cos m\pi r - \dfrac{2m\pi\kappa t \sin m\pi r}{r} \right) e^{-(m\pi)^2 \kappa t}$

$$+ \dfrac{2A}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2 - m^2} \dfrac{\sin n\pi r}{r} e^{-(n\pi)^2 \kappa t}。$$

254. 将下列方程化为 S-L 型方程的标准形式：（1）$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+(x+\lambda)y=0$；

（2）$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\cot x\dfrac{dy}{dx}+\lambda y=0$；（3）$x(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(a-bx)\dfrac{dy}{dx}-\lambda y=0$；

（4）$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\dfrac{dy}{dx}+\lambda y=0$。

（1）方程两边同乘 x 得：$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+x(x+\lambda)y=0$，写成：

$$\dfrac{d}{dx}\left(x^2\dfrac{dy}{dx}\right)+(\lambda x+x^2)y=0。$$

（2）两边同乘 $\sin x$ 得：$\sin x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\cos x\dfrac{dy}{dx}+\lambda y\sin x=0$，写成：

$$\dfrac{d}{dx}\left(\sin x\dfrac{dy}{dx}\right)+\lambda y\sin x=0。$$

（3）两边同乘 $\dfrac{x^{a-1}}{(1-x)^{a-b+1}}$ 得：$\dfrac{x^a}{(1-x)^{a-b}}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{x^{a-1}(a-bx)}{(1-x)^{a-b+1}}\dfrac{dy}{dx}-\lambda\dfrac{x^{a-1}}{(1-x)^{a-b+1}}y=0$，

写成：$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x^a}{(1-x)^{a-b}}\dfrac{dy}{dx}\right]-\lambda\dfrac{x^{a-1}}{(1-x)^{a-b+1}}y=0$。

（4）两边同乘 e^{-x} 得：$xe^{-x}\dfrac{d^2y}{dx^2}+(1-x)e^{-x}\dfrac{dy}{dx}+\lambda e^{-x}y=0$，写成：

$$\dfrac{d}{dx}\left(xe^{-x}\dfrac{dy}{dx}\right)+\lambda e^{-x}y=0。$$

255. 设有本征值问题 $\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0\\ y'(a)=0,\,y'(b)=0\end{cases}$，其中 $p(x)$，$\rho(x)$，$q(x)$

在 $a\leq x\leq b$ 上均为连续实函数，且 $p(x)\geq p_0>0$，$\rho(x)\geq\rho_0>0$。试证明本征函数的正交性。

设本征值 λ_1 对应本征函数 y_1，本征值 λ_2 对应本征函数 y_2（$\lambda_1\neq\lambda_2$），即

$$\lambda_1 \rho y_1 = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_1}{dx}\right)+qy_1, \qquad\qquad (a)$$

$$\lambda_2 \rho y_2 = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_2}{dx}\right)+qy_2。 \qquad\qquad (b)$$

（a）$\times y_2 -$（b）$\times y_1$ 得 $\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\rho y_1 y_2 = y_1\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_2}{dx}\right)-y_2\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_1}{dx}\right)$，

两边积分得 $\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\int_a^b \rho y_1 y_2 dx = p y_1\frac{dy_2}{dx}\bigg|_a^b - p\, y_2\frac{dy_1}{dx}\bigg|_a^b = 0$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\int_a^b \rho y_1 y_2 dx = 0$，即 y_1, y_2 正交。

256．假设 S-L 方程的本征值问题 $\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0 \\ \left(ay'-by\right)_{x=0}=0,\left(cy'+dy\right)_{x=l}=0\end{cases}$ 中，

$p(x)\geq p_0 >0$，$\rho(x)\geq\rho_0 >0$，$q(x)\geq 0$，a 与 b 及 c 与 d 均为不同时为 0 的非负常数，证明本征值 ≥ 0。

方程两边同乘 y 得 $\lambda\rho y^2 = -y\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{dy}{dx}\right)+qy^2$，两边积分得

$$\lambda\int_0^l \rho y^2 dx = p\left[y(0)y'(0)-y(l)y'(l)\right]+\int_0^l p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + \int_0^l qy^2 dx$$

若 $a\neq 0$，则 $y'(0)=\dfrac{b}{a}y(0)$，$y(0)y'(0)=\dfrac{b}{a}y^2(0)\geq 0$，

若 $b\neq 0$，则 $y(0)=\dfrac{a}{b}y'(0)$，$y(0)y'(0)=\dfrac{a}{b}y'^2(0)\geq 0$；

若 $c\neq 0$，则 $y'(l)=-\dfrac{d}{c}y(l)$，$-y(l)y'(l)=\dfrac{d}{c}y^2(l)\geq 0$，

若 $d\neq 0$，则 $y(l)=\dfrac{c}{d}y'(l)$，$-y(l)y'(l)=\dfrac{c}{d}y'^2(l)\geq 0$；

所以 $\lambda\geq 0$。

257．求解本征值问题：$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\dfrac{\lambda}{r^2}R=0 \\ R(a)=0, R(b)=0\end{cases}$，其中 $b>a>0$。

令 $r = e^t$，则有 $r \dfrac{d}{dr} = \dfrac{d}{dt}$。方程可写为 $r \dfrac{d}{dr}\left(r \dfrac{dR}{dr} \right) + \lambda R = 0$，即 $\dfrac{d^2 R}{dt^2} + \lambda R = 0$。

由上题结论可知 $\lambda \geq 0$，$\lambda = 0$ 时，方程通解为 $R = A + Bt = A + B \ln r$，由边界条件可得 $R = 0$，所以只有 $\lambda > 0$。

通解为 $R = A \sin \sqrt{\lambda} t + B \cos \sqrt{\lambda} t = A \sin\left(\sqrt{\lambda} \ln r \right) + B \cos\left(\sqrt{\lambda} \ln r \right)$，由边界条件得

$$\begin{cases} A \sin\left(\sqrt{\lambda} \ln a \right) + B \cos\left(\sqrt{\lambda} \ln a \right) = 0 \\ A \sin\left(\sqrt{\lambda} \ln b \right) + B \cos\left(\sqrt{\lambda} \ln b \right) = 0 \end{cases},$$

所以 $\begin{vmatrix} \sin\left(\sqrt{\lambda} \ln a \right) & \cos\left(\sqrt{\lambda} \ln a \right) \\ \sin\left(\sqrt{\lambda} \ln b \right) & \cos\left(\sqrt{\lambda} \ln b \right) \end{vmatrix} = \sin\left[\sqrt{\lambda}\left(\ln b - \ln a \right) \right] = 0$，

则本征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\ln b - \ln a} \right)^2$，本征函数 $R_n(r) = \sin\left(\dfrac{\ln r - \ln a}{\ln b - \ln a} n\pi \right)$（$n = 1, 2, \cdots$）。

258．证明下列奇异的本征值问题是自伴的：（1）$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2 \right) \dfrac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0 \\ y(\pm 1) \text{有界} \end{cases}$；

（2）$\begin{cases} \dfrac{1}{x} \dfrac{d}{dx}\left(x \dfrac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 0 \\ y(0) \text{有界}, y(1) = 0 \end{cases}$。

（1）记 $L = -\dfrac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2 \right) \dfrac{d}{dx} \right]$，则

$$y_1 L y_2 - y_2 L y_1 = y_2 \dfrac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2 \right) \dfrac{dy_1}{dx} \right] - y_1 \dfrac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2 \right) \dfrac{dy_2}{dx} \right]$$

$$= y_2 \dfrac{d\left(1 - x^2 \right)}{dx} \dfrac{dy_1}{dx} + \left(1 - x^2 \right) y_2 \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} - y_1 \dfrac{d\left(1 - x^2 \right)}{dx} \dfrac{dy_2}{dx} - \left(1 - x^2 \right) y_1 \dfrac{d^2 y_2}{dx^2}$$

$$= \left(1 - x^2 \right)\left(y_2 \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} - y_1 \dfrac{d^2 y_2}{dx^2} \right) + \dfrac{d\left(1 - x^2 \right)}{dx}\left(y_2 \dfrac{dy_1}{dx} - y_1 \dfrac{dy_2}{dx} \right)$$

$$= \dfrac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2 \right)\left(y_2 \dfrac{dy_1}{dx} - y_1 \dfrac{dy_2}{dx} \right) \right],$$

两边积分得 $\int_{-1}^{1}\left(y_1 L y_2 - y_2 L y_1\right)dx = \left(1-x^2\right)\left(y_2\dfrac{dy_1}{dx} - y_1\dfrac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1}$,

由于 $y(\pm 1)$ 有界，所以 $\left(1-x^2\right)\left(y_2\dfrac{dy_1}{dx} - y_1\dfrac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=\pm 1} = 0$, $\int_{-1}^{1} y_1 L\left(y_2\right)dx = \int_{-1}^{1} L\left(y_1\right)y_2 dx$,

即 L 为自伴算符。

（2）记 $L = -\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{d}{dx}\right)$ ，重复上小题过程有

$$\int_{-1}^{1}\left(y_1 L y_2 - y_2 L y_1\right)dx = x\left(y_2\dfrac{dy_1}{dx} - y_1\dfrac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = -x\left(y_2\dfrac{dy_1}{dx} - y_1\dfrac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} ,$$

由于 $y(0)$ 有界，所以上式等于 0，即 L 为自伴算符。

259. 设有本征值问题：
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right] + \left[\lambda\rho(x) - q(x)\right]y = 0 \\ y(b) = a_{11}y(a) + a_{12}y'(a), \quad y'(b) = a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) \end{cases} ,$$

其中 $p(a) = p(b)$ 。证明：当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$ 时，对应不同本征值的本征函数正交。

设本征值 λ_1 对应本征函数 y_1 ，本征值 λ_2 对应本征函数 y_2 （ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ），255 题已得：

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\int_a^b \rho y_1 y_2 dx = \left(p y_1 y_2' - p y_2 y_1'\right)_a^b = p(a)\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)_a^b$$

$$= p(a)\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - 1\right)\left[y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a)\right]$$

所以当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$ 时， y_1 和 y_2 正交。

260. 两条质料不同，长各为 l_1 与 l_2 的均匀弦连接在一起，而两端（ $x=0$ 及 $x = l_1 + l_2$ ）固定。试决定弦的横振动本征频率，并验证本征函数的正交性。

令 u_1 ， u_2 分别表示两段弦的横向位移，由弦的连续性可得连接条件 $u_1\big|_{x=l_1} = u_2\big|_{x=l_1}$ ，

$\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=l_1} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=l_1}$ 。该问题为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, 0 < x < l_1 \\[2mm]
\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, l_1 < x < l_1 + l_2 \\[2mm]
u_1\big|_{x=0} = 0, u_2\big|_{x=l_1+l_2} = 0 \\[2mm]
u_1\big|_{x=l_1} = u_2\big|_{x=l_1}, \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l_1} = \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l_1}
\end{cases}
$$ 。令 $u_1 = X_1(x)e^{i\omega t}$，$u_2 = X_2(x)e^{i\omega t}$，代入方程及边

界条件和连接条件得：
$$
\begin{cases}
X_1''(x) + \left(\dfrac{\omega}{a_1}\right)^2 X_1(x) = 0, 0 < x < l_1 \\[2mm]
X_2''(x) + \left(\dfrac{\omega}{a_2}\right)^2 X_2(x) = 0, l_1 < x < l_1 + l_2 \\[2mm]
X_1(0) = 0, X_2(l_1 + l_2) = 0 \\[2mm]
X_1(l_1) = X_2(l_1), X_1'(l_1) = X_2'(l_1)
\end{cases}
$$ 。

当 $\omega = 0$ 时只有零解，故 $\omega > 0$（$\omega < 0$ 是同一解）。

由方程及 $X_1(0) = 0, X_2(l_1 + l_2) = 0$ 可得 $X(x) = \begin{cases} X_1(x) = A\sin\dfrac{\omega}{a_1}x, 0 < x < l_1 \\[2mm] X_2(x) = B\sin\dfrac{\omega}{a_2}(l_1 + l_2 - x), l_1 < x < l_1 + l_2 \end{cases}$。

代入条件 $X_1(l_1) = X_2(l_1), X_1'(l_1) = X_2'(l_1)$ 得 $\begin{cases} A\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 - B\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0 \\[2mm] A\dfrac{\omega}{a_1}\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 + B\dfrac{\omega}{a_2}\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0 \end{cases}$，（∗）

上式中，由于 A, B 都不为 0，所以 $\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1$ 与 $\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 同为零或同为非零，$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1$ 与

$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 同为零或同为非零。

（1）$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 \neq 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \neq 0$，$\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 \neq 0$，$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \neq 0$。由（∗），由于 A, B 都不

为 0，所以 $\begin{vmatrix} \sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 & -\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \\[3mm] \dfrac{\omega}{a_1}\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 & \dfrac{\omega}{a_2}\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \end{vmatrix} = 0$，即 $a_1\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 + a_2\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = 0$，

两边同除 $\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 得 $a_1\tan\dfrac{\omega}{a_1}l_1 + a_2\tan\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0$，本征频率 ω_n 即为该方程的第 n

个正根。由（*）第一式可取 $A = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}l_1}$ ，$B = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}l_2}$ ，

即 $X_n(x) = \begin{cases} X_{1n}(x) = \dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}x}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}l_1},0 < x < l_1 \\[4mm] X_{2n}(x) = \dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}(l_1 + l_2 - x)}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}l_2},l_1 < x < l_1 + l_2 \end{cases}$ 。

（2） $\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = 0$ ，$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0$ （此时 $\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1$ 和 $\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 为 ± 1），则存在互质整数 r,s 使

$\omega = \dfrac{r\pi a_1}{l_1} = \dfrac{s\pi a_2}{l_2}$ （此时参数满足 $\dfrac{l_1 a_2}{l_2 a_1} = \dfrac{r}{s}$），该频率为基频，本征频率为

$\omega_n = \dfrac{nr\pi a_1}{l_1} = \dfrac{ns\pi a_2}{l_2}$ （$n = 1,2,\cdots$）。代入（*）第二式得 $\dfrac{A}{a_1}(-1)^{nr} = -\dfrac{B}{a_2}(-1)^{sn}$ ，可取

$A = (-1)^{nr}a_1$ ，$B = -(-1)^{sn}a_2$ ，

即 $X_n(x) = \begin{cases} X_{1n}(x) = (-1)^{rn}a_1\sin\dfrac{nr\pi}{l_1}x,0 < x < l_1 \\[4mm] X_{2n}(x) = -(-1)^{sn}a_2\sin\dfrac{ns\pi}{l_2}(l_1 + l_2 - x) = -a_2\sin\dfrac{ns\pi}{l_2}(l_1 - x),l_1 < x < l_1 + l_2 \end{cases}$ 。

（3） $\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = 0$ ，$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0$ （此时 $\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1$ 和 $\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 为 ± 1），则存在互质的

$2r+1,2s+1$ 使 $\dfrac{l_1 a_2}{l_2 a_1} = \dfrac{2r+1}{2s+1}$ ，本征频率 $\omega_n = (2n+1)\dfrac{2r+1}{2l_1}a_1\pi = (2n+1)\dfrac{2s+1}{2l_2}a_2\pi$

（$n = 0,1,2,\cdots$）。代入（*）第一式得 $(-1)^{n+r}A = (-1)^{n+s}B$ ，可取 $A = (-1)^r$ ，$B = (-1)^s$ ，

即 $X_n(x) = \begin{cases} X_{1n}(x) = (-1)^r\sin\dfrac{(2r+1)(2n+1)}{2l_1}\pi x,0 < x < l_1 \\[4mm] X_{2n}(x) = (-1)^s\sin\dfrac{(2s+1)(2n+1)}{2l_2}\pi(l_1 + l_2 - x) \\[4mm] \quad = (-1)^n\cos\dfrac{(2s+1)(2n+1)}{2l_2}\pi(l_1 - x),l_1 < x < l_1 + l_2 \end{cases}$ 。

设本征频率 ω_n 对应本征函数 X_n，本征频率 ω_m 对应本征函数 X_m（$\omega_n \neq \omega_m$），则

$$\frac{\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)}{a_1^2} \int_0^{l_1} X_{1n} X_{1m} dx = \left(X_{1n} X_{1m}' - X_{1n}' X_{1m}\right)\Big|_0^{l_1} = X_{1n}(l_1) X_{1m}'(l_1) - X_{1n}'(l_1) X_{1m}(l_1),$$

$$\frac{\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)}{a_2^2} \int_{l_1}^{l_1+l_2} X_{2n} X_{2m} dx = \left(X_{2n} X_{2m}' - X_{2n}' X_{2m}\right)\Big|_{l_1}^{l_1+l_2}$$

$$= -X_{2n}(l_1) X_{2m}'(l_1) + X_{2n}'(l_1) X_{2m}(l_1),$$

以上两式相加得 $\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)\left(\int_0^{l_1} \frac{1}{a_1^2} X_{1n} X_{1m} dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{1}{a_2^2} X_{2n} X_{2m} dx\right)$

$$= X_{1n}(l_1) X_{1m}'(l_1) - X_{2n}(l_1) X_{2m}'(l_1) - X_{1n}'(l_1) X_{1m}(l_1) + X_{2n}'(l_1) X_{2m}(l_1) = 0 \text{。}$$

记 $\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_1^2}, 0 < x < l_1 \\[2mm] \dfrac{1}{a_2^2}, l_1 < x < l_1 + l_2 \end{cases}$，上式即为 $\int_0^{l_1+l_2} \rho X_n X_m dx = 0$。

261. 杆 AC 由两部分组成：$AB = l_1$，$BC = l_2$，他们分别都是均匀的。设 A 端固定，C 端自由，求杆的纵振动本征频率。

令 u_1，u_2 分别表示两段杆的纵向位移。在连接处取一小段（如图），

$$P_2(l_1+\varepsilon)S - P_1(l_1-\varepsilon)S = 2\rho S\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=\xi}, \text{ 其中 } \xi \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)\text{。代入 } P = E\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ 并令}$$

$\varepsilon \to 0$ 得 $E_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=l_1} = E_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=l_1}$。另外显然有 $u_1\big|_{x=l_1} = u_2\big|_{x=l_1}$。

该问题为 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, 0 < x < l_1 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, l_1 < x < l \\[2mm] u_1\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \\[2mm] u_1\big|_{x=l_1} = u_2\big|_{x=l_1}, E_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=l_1} = E_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=l_1} \end{cases}$ 其中 $l = l_1 + l_2$。

同上题，令 $u_1 = X_1(x)e^{i\omega t}$，$u_2 = X_2(x)e^{i\omega t}$，可得

$$\begin{cases} X_1''(x) + \left(\dfrac{\omega}{a_1}\right)^2 X_1(x) = 0, 0 < x < l_1 \\ X_2''(x) + \left(\dfrac{\omega}{a_2}\right)^2 X_2(x) = 0, l_1 < x < l \\ X_1(0) = 0, X_2'(l) = 0 \\ X_1(l_1) = X_2(l_1), E_1 X_1'(l_1) = E_2 X_2'(l_1) \end{cases} \quad , \quad \text{可得 } X(x) = \begin{cases} X_1(x) = A\sin\dfrac{\omega}{a_1}x, 0 < x < l_1 \\ X_2(x) = B\cos\dfrac{\omega}{a_2}(l-x), l_1 < x < l \end{cases} \text{。}$$

由连接条件得
$$\begin{cases} A\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = B\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \\ A\dfrac{E_1}{a_1}\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = B\dfrac{E_2}{a_2}\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \end{cases} \text{。} \qquad (*)$$

（1）$\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 \neq 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \neq 0$，$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \neq 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 \neq 0$。本征频率 ω_n 是方程

$$\dfrac{E_1}{a_1}\cot\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = \dfrac{E_2}{a_2}\tan\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \text{ 的第 } n \text{ 个正根，}$$

$$X_n(x) = \begin{cases} X_{1n}(x) = \sin\dfrac{\omega_n}{a_1}x \Big/ \sin\dfrac{\omega_n}{a_1}l_1, 0 < x < l_1 \\ X_{2n}(x) = \cos\dfrac{\omega_n}{a_2}(l-x) \Big/ \cos\dfrac{\omega_n}{a_2}l_2, l_1 < x < l \end{cases} \text{。}$$

（2）$\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0$。$\dfrac{l_1 a_2}{l_2 a_1} = \dfrac{2r}{2s+1}$（$2r$ 与 $2s+1$ 互质），

本征频率 $\omega_n = (2n+1)\dfrac{r a_1 \pi}{l_1} = (2n+1)\dfrac{(2s+1)a_2\pi}{2l_2}$（$n = 0,1,2,\cdots$）。

$$X_n(x) = \begin{cases} X_{1n}(x) = \dfrac{(-1)^r a_1}{E_1}\sin\dfrac{(2n+1)r}{l_1}\pi x, 0 < x < l_1 \\ X_{2n}(x) = \dfrac{(-1)^{n+s} a_2}{E_2}\cos\dfrac{(2n+1)(2s+1)}{2l_2}\pi(l-x) \\ \qquad\quad = -\dfrac{a_2}{E_2}\sin\dfrac{(2n+1)(2s+1)}{2l_2}\pi(l_1-x), l_1 < x < l \end{cases}$$

（3）$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = 0$。$\dfrac{l_1 a_2}{l_2 a_1} = \dfrac{2s+1}{2r}$（$2r$ 与 $2s+1$ 互质）。

$$\omega_n = (2n+1)\frac{ra_2\pi}{l_2} = (2n+1)\frac{(2s+1)a_1\pi}{2l_1} \quad (n = 0,1,2,\cdots)。$$

$$X_n(x) = \begin{cases} X_{1n}(x) = (-1)^{n+s}\sin\dfrac{(2n+1)(2s+1)}{2l_1}\pi x, 0 < x < l_1 \\[3mm] X_{2n}(x) = (-1)^r\cos\dfrac{(2n+1)r}{l_2}\pi(l-x) \\[3mm] \quad = \cos\dfrac{(2n+1)r}{l_2}\pi(l_1-x), l_1 < x < l \end{cases}。$$

262. 三维空间的本征值问题。设本征值问题为 $\begin{cases} \nabla^2 u + \lambda u = 0, (x,y,z) \in V \\ \left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_\Sigma = 0 \end{cases}$ ，其中 Σ 是 V 的

边界面。若对应本征值 λ_n 的本征函数为 u_n ，试证明：$\iiint\limits_V u_m^* u_n dV = 0$ ， $m \neq n$ ，即对应不

同本征值的本征函数正交。

由 Gauss 公式可得：

$$\oiint\limits_\Sigma \left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n} - u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS = \oiint\limits_\Sigma \left(u_n\nabla u_m^* - u_m^*\nabla u_n\right)\cdot dS = \iiint\limits_V \nabla\cdot\left(u_n\nabla u_m^* - u_m^*\nabla u_n\right)dV$$

$$= \iiint\limits_V \left(\nabla u_n\cdot\nabla u_m^* + u_n\nabla^2 u_m^* - \nabla u_m^*\cdot\nabla u_n - u_m^*\nabla^2 u_n\right)dV = \iiint\limits_V \left(u_n\nabla^2 u_m^* - u_m^*\nabla^2 u_n\right)dV。$$

所以 $\left(\lambda_n - \lambda_m^*\right)\iiint\limits_V u_m^* u_n dV = \iiint\limits_V \left(u_n\nabla^2 u_m^* - u_m^*\nabla^2 u_n\right)dV = \oiint\limits_\Sigma \left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n} - u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS。$

若 $\alpha \neq 0$ ，则 $u\big|_\Sigma = -\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma$ ，

$$\oiint\limits_\Sigma \left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n} - u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS = \oiint\limits_\Sigma \left(-\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u_n}{\partial n}\frac{\partial u_m^*}{\partial n} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u_m^*}{\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS = 0 ，$$

若 $\beta \neq 0$ ，则 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = -\dfrac{\alpha}{\beta}u\big|_\Sigma$ ，

$$\oiint\limits_\Sigma \left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n} - u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS = \oiint\limits_\Sigma \left(-\frac{\alpha}{\beta}u_n u_m^* + \frac{\alpha}{\beta}u_n u_m^*\right)dS = 0。$$

即对应不同本征值的本征函数正交。

263．若上题中的方程改为 $\nabla\cdot\big[p(x,y,z)\nabla u\big]+\lambda\rho(x,y,z)u=0$，试证明：对应不同本征值的本征函数以权重 $\rho(x,y,z)$ 正交。

$$\oiint_{\Sigma}p\left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n}-u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS=\oiint_{\Sigma}\left(u_np\nabla u_m^*-u_m^*p\nabla u_n\right)\cdot dS=\iiint_V\nabla\cdot\left(u_np\nabla u_m^*-u_m^*p\nabla u_n\right)dV$$

$$=\iiint_V\left[\nabla u_n\cdot p\nabla u_m^*+u_n\nabla\cdot\left(p\nabla u_m^*\right)-\nabla u_m^*\cdot p\nabla u_n-u_m^*\nabla\cdot\left(p\nabla u_n\right)\right]dV$$

$$=\iiint_V\left[u_n\nabla\cdot\left(p\nabla u_m^*\right)-u_m^*\nabla\cdot\left(p\nabla u_n\right)\right]dV\ 。$$

$$\left(\lambda_n-\lambda_m^*\right)\iiint_V u_m^*u_n\,dV=\iiint_V\left[u_n\nabla\cdot\left(p\nabla u_m^*\right)-u_m^*\nabla\cdot\left(p\nabla u_n\right)\right]dV=\oiint_{\Sigma}p\left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n}-u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS$$

同上题可得上式 $=0$ 。

264．设本征值问题 $\begin{cases}\nabla^2\Phi+\lambda\Phi=0\\ \Phi\big|_{\Sigma}=0\end{cases}$ 的解（本征函数）为 $\{\Phi_k\}$，对应本征值 $\{\lambda_k\}$，

$k=1,2,\cdots$ 。试证明：当 $\lambda=0$ 不是本征值时，Poisson 方程的第一类边值问题 $\begin{cases}\nabla^2u=-f\\ u\big|_{\Sigma}=0\end{cases}$ 的

解为 $u=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{A_k}{\lambda_k}\Phi_k$，$A_k$ 是 f 按 $\{\Phi_k\}$ 展开的系数。

将 u 按 $\{\Phi_k\}$ 展开，即 $u=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\Phi_k$，代入方程得 $-\sum_{k=1}^{\infty}u_k\lambda_k\Phi_k=-\sum_{k=1}^{\infty}A_k\Phi_k$，比较系数得

$u_k=\dfrac{A_k}{\lambda_k}$，即 $u=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{A_k}{\lambda_k}\Phi_k$ 。

267．证明：如果将上题中 Φ 与 u 的边界条件改为齐次第二类或第三类边界条件时，结论仍然成立。

可看出，由于是齐次条件，所以 $\{\Phi_k\}$ 的叠加仍满足 u 的边界条件，上面的运算仍成立。

266．在与 264 题相同的条件下，证明：$\begin{cases}\nabla^2u+\Lambda u=-f\\ u\big|_{\Sigma}=0\end{cases}$，$\Lambda\ne\lambda_k$ 的解为 $u=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{A_k}{\lambda_k-\Lambda}\Phi_k$ 。

将 $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \Phi_k$ 代入方程得 $-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k \Phi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda u_k \Phi_k = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \Phi_k$，所以 $u_k = \dfrac{A_k}{\lambda_k - \Lambda}$，即

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k - \Lambda} \Phi_k \text{。}$$

267．用 264 题方法求解矩形区域 $0 \le x \le a$，$0 \le y \le b$ 内 Poisson 方程的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y) \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=a} = 0 \\ u\big|_{y=0} = 0, u\big|_{y=b} = 0 \end{cases} \text{。}$$

先解本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=a} = 0 \\ u\big|_{y=0} = 0, u\big|_{y=b} = 0 \end{cases}$。分离变量得 $\begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ X(0) = 0, X(a) = 0 \\ Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \\ Y(0) = 0, Y(b) = 0 \end{cases}$，

解得 $\mu = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$，$X(x) = \sin\dfrac{n\pi}{a}x$（$n = 1,2,\cdots$），

$\lambda - \mu = \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2$，$Y(y) = \sin\dfrac{m\pi}{b}y$（$m = 1,2,\cdots$）。

即本征值 $\lambda_{m,n} = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2$，

本征函数为 $\Phi_{m,n}(x,y) = X_n(x)Y_m(y) = \sin\dfrac{n\pi}{a}x\sin\dfrac{m\pi}{b}y$（$n,m = 1,2,\cdots$）。

令 $f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n}\Phi_{m,n}(x,y)$，则 $A_{m,n} = \dfrac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\dfrac{n\pi}{a}x\sin\dfrac{m\pi}{b}y\,dxdy$。

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}}{\lambda_{m,n}}\Phi_{m,n}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}}{\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y \text{。}$$

268. 用 264 题方法求解 231 题:(1) $\begin{cases} \nabla^2 u = -2 \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=a} = 0 \\ u\big|_{y=-b/2} = 0, u\big|_{y=b/2} = 0 \end{cases}$;(2) $\begin{cases} \nabla^2 u = -x^2 y \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=a} = 0 \\ u\big|_{y=-b/2} = 0, u\big|_{y=b/2} = 0 \end{cases}$ 。

本征值问题 $\begin{cases} \nabla^2 u + \lambda u = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=a} = 0 \\ u\big|_{y=-b/2} = 0, u\big|_{y=b/2} = 0 \end{cases}$ 的解为:本征值 $\lambda_{m,n} = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2$,本征函数

$$\Phi_{m,n} = \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)。$$

$$A_{m,n} = -\frac{8}{ab}\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)dxdy = -\frac{8}{\pi^2 mn}\left[1 - (-1)^n\right]\left[1 - (-1)^m\right],$$

$$A_{2i+1,2j+1} = -\frac{32}{\pi^2(2i+1)(2j+1)},\quad 其余的 A_{m,n} = 0。$$

所以 $u(x,y) = \displaystyle\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{A_{m,n}}{\lambda_{m,n}}\Phi_{m,n}(x,y) = \sum_{j=0}^\infty \sum_{i=0}^\infty \frac{A_{2i+1,2j+1}}{\lambda_{2i+1,2j+1}}\Phi_{2i+1,2j+1}(x,y)$

$$= -\frac{32}{\pi^4}\sum_{j=0}^\infty \sum_{i=0}^\infty \frac{\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{a}x \sin\dfrac{(2i+1)\pi}{b}\left(y + \dfrac{b}{2}\right)}{(2i+1)(2j+1)\left[\dfrac{(2j+1)^2}{a^2} + \dfrac{(2i+1)^2}{b^2}\right]}。$$

(2) $A_{m,n} = -\dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^a x^2 y \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)dxdy$

$$= (-1)^{m+n}\frac{2a^2 b}{\pi mn}\left[1 + (-1)^m\right]\left\{-1 + \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[1 - (-1)^n\right]\right\}。$$

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{A_{m,n}}{\lambda_{m,n}}\Phi_{m,n}(x,y) = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{A_{m,n}}{\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)。$$

269. 设有本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right] + \dfrac{d}{dx}\left[q(x)\dfrac{dy}{dx}\right] + \left[\lambda\rho(x) - r(x)\right]y = 0 \\ y\big|_{x=a} = 0,\ p(x)\dfrac{d^2 y}{dx^2}\bigg|_{x=a} = 0,\ \dfrac{dy}{dx}\bigg|_{x=b} = 0,\ \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right]_{x=b} = 0 \end{cases}$,

试证明：对应不同本征值的本征函数正交。

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2^*\right)\int_a^b \rho y_1 y_2^* dx = \int_a^b y_1 \frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)dx - \int_a^b y_2^* \frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)dx$$

$$+ \int_a^b y_1 \frac{d}{dx}\left(q\frac{dy_2^*}{dx}\right)dx - \int_a^b y_2^* \frac{d}{dx}\left(q\frac{dy_1}{dx}\right)dx$$

$$= y_1 \frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)\Big|_a^b - y_2^* \frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)\Big|_a^b + y_1 q\frac{dy_2^*}{dx}\Big|_a^b - y_2^* q\frac{dy_1}{dx}\Big|_a^b$$

$$- \int_a^b \frac{dy_1}{dx}\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)dx + \int_a^b \frac{dy_2^*}{dx}\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)dx$$

$$= y_1 \frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)\Big|_a^b - y_2^* \frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)\Big|_a^b + y_1 q\frac{dy_2^*}{dx}\Big|_a^b - y_2^* q\frac{dy_1}{dx}\Big|_a^b$$

$$- \frac{dy_1}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)\Big|_a^b + \frac{dy_2^*}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)\Big|_a^b = 0 \text{。}$$

270．设有 4 阶常微分方程 $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right] + \dfrac{d}{dx}\left[q(x)\dfrac{dy}{dx}\right] + \left[\lambda\rho(x) - r(x)\right]y = 0$，

$p(x)$，$q(x)$，$\rho(x)$，$r(x)$ 均为已知，λ 为待定系数。若 $y(x)$ 在端点 $x = a$ 及 $x = b$ 均

满足下列边界条件：$y = 0$，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ 或 $y = 0$，$p\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 0$ 或 $\dfrac{dy}{dx} = 0$，$\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$，

试证明：对应于不同本征值的本征函数在区间 $[a,b]$ 上以权重 $\rho(x)$ 正交。

同上题，$\left(\lambda_1 - \lambda_2^*\right)\int_a^b \rho y_1 y_2^* dx = y_1 \dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)\Big|_a^b - y_2^* \dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{d^2 y_1}{dx^2}\right)\Big|_a^b + y_1 q\dfrac{dy_2^*}{dx}\Big|_a^b - y_2^* q\dfrac{dy_1}{dx}\Big|_a^b$

$$- \frac{dy_1}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)\Big|_a^b + \frac{dy_2^*}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)\Big|_a^b \text{，}$$

可看出，只要满足题目所给任一组条件，上式就等于 0。

271．设有本征值问题 $\begin{cases} X^{(4)} + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \\ X''(0) = 0, X''(l) = 0 \end{cases}$，证明：本征值 $\lambda_n = -\dfrac{\int_0^l |X_n''|^2 dx}{\int_0^l |X_n|^2 dx} < 0$。

见习题 12 第 230 题。

272. 试根据 Legendre 方程在 $x=1$ 的有界解（见习题 10 第 198 题）求解本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right] + \mu\left(\mu+1\right)y = 0 \\ y(\pm 1)\text{有界} \end{cases}。$$

第 198 题已求得 $x=1$ 的有界解为 $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{\left(k!\right)^2} \dfrac{\Gamma\left(\mu+k+1\right)}{\Gamma\left(\mu-k+1\right)}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^k$ ，则

$y(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(-1\right)^k}{\left(k!\right)^2} \dfrac{\Gamma\left(\mu+k+1\right)}{\Gamma\left(\mu-k+1\right)}$ ，记该级数通项为 u_k ，若 μ 不是整数，当 k 充分大时，

$$\dfrac{u_k}{u_{k+1}} = -\dfrac{\left[\left(k+1\right)!\right]^2}{\left(k!\right)^2} \dfrac{\Gamma\left(\mu+k+1\right)}{\Gamma\left(\mu-k+1\right)} \dfrac{\Gamma\left(\mu-k\right)}{\Gamma\left(\mu+k+2\right)} = \dfrac{\left(k+1\right)^2}{\left(\mu+k+1\right)\left(k-\mu\right)} = 1 + \dfrac{1}{k} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right),$$

所以该级数发散。

若 $\mu = n$ （ $n = 0,1,2,\cdots$ ），当 $k \geq n+1$ 时有 $\dfrac{1}{\Gamma\left(n-k+1\right)} = 0$ ，所以 $y(x)$ 截断为多项式：

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\left(k!\right)^2} \dfrac{\left(n+k\right)!}{\left(n-k\right)!}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^k,$$ 这就是该本征值问题的解。

273. 证明：（1） $P_{2k}(0) = \left(-1\right)^k \dfrac{\left(2k\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^2} = \left(-1\right)^{k+1} \dfrac{2}{\mathrm{B}\left(k+1,-1/2\right)}$ ， $P_{2k+1}(0) = 0$ ；

（2） $P'_{2k}(0) = 0$ ， $P'_{2k+1}(0) = \left(-1\right)^k \dfrac{\left(2k+1\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^2} = \left(-1\right)^k \dfrac{2}{\mathrm{B}\left(k+1,1/2\right)}$ ；

（3） $P'_k(1) = \dfrac{1}{2}k\left(k+1\right)$ ， $P'_k(-1) = \dfrac{\left(-1\right)^{k-1}}{2}k\left(k+1\right)$ ， $P''_k(1) = \dfrac{1}{8}\left(k-1\right)k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$ 。

（1） $P_n(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{[n/2]} \dfrac{\left(-1\right)^r\left(2n-2r\right)!}{2^n\, r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r}$ ，所以

$$P_{2k}(x) = \sum_{r=0}^{k} \dfrac{\left(-1\right)^r\left(4k-2r\right)!}{2^{2k}\, r!(2k-r)!(2k-2r)!} x^{2k-2r}, \quad P_{2k+1}(x) = \sum_{r=0}^{k} \dfrac{\left(-1\right)^r\left(4k+2-2r\right)!}{2^{2k+1}\, r!(2k+1-r)!(2k+1-2r)!} x^{2k+1-2r},$$

显然有 $P_{2k+1}(0) = 0$ ，取 $P_{2k}(x)$ 的常数项即为 $P_{2k}(0)$ ，即

$$P_{2k}(x) = \dfrac{\left(-1\right)^k\left(2k\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^2} = \dfrac{\left(-1\right)^k}{2^{2k}} \dfrac{\Gamma\left(2k+1\right)}{\Gamma^2\left(k+1\right)} = \dfrac{\left(-1\right)^k}{2^{2k}} \dfrac{\dfrac{2^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(k+1/2\right)\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma^2\left(k+1\right)}$$

$$= -(-1)^k \frac{2\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)(-2\sqrt{\pi})} = (-1)^{k+1} \frac{2\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-1/2)} = (-1)^{k+1} \frac{2}{\mathrm{B}(k+1,-1/2)} \text{。}$$

（2） $P_n'(x) = \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r-1)!} x^{n-2r-1}$ ， 则

$$P_{2k}'(x) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^r (4k-2r)!}{2^{2k} r!(2k-r)!(2k-2r-1)!} x^{2k-2r-1}, \quad P_{2k+1}'(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^r (4k+2-2r)!}{2^{2k+1} r!(2k+1-r)!(2k-2r)!} x^{2k-2r},$$

所以 $P_{2k}'(0) = 0$ ， $P_{2k+1}'(0) = \dfrac{(-1)^k (2k+2)!}{2^{2k+1} k!(k+1)!} = \dfrac{(-1)^k (2k+1)!}{2^{2k} (k!)^2} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}} \dfrac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma^2(k+1)}$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{2^{2k+1}\Gamma(k+1)\Gamma(k+3/2)}{\Gamma^2(k+1)\Gamma(1/2)} = (-1)^k \frac{2\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)} = (-1)^k \frac{2}{\mathrm{B}(k+1,1/2)} \text{。}$$

（3） 由 $P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \dfrac{1}{(n!)^2} \dfrac{(k+n)!}{(k-n)!} \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$ 得 $P_k'(x) = \sum_{n=1}^{k} \dfrac{n}{2(n!)^2} \dfrac{(k+n)!}{(k-n)!} \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^{n-1}$ 。

所以 $P_k'(1) = \dfrac{(k+1)!}{2(k-1)!} = \dfrac{1}{2}k(k+1)$ 。

由 Legendre 多项式的微分表示可得 $P_k'(x) = \dfrac{1}{2^k k!} \dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k$ ， 所以

$$P_k'(-x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^{k+1}}{d(-x)^{k+1}}(x^2-1)^k = (-1)^{k+1} P_k'(x), \quad \text{所以 } P_k'(-1) = \frac{(-1)^{k-1}}{2} k(k+1) \text{。}$$

又有 $P_k''(x) = \sum_{n=2}^{k} \dfrac{n(n-1)}{2^2 (n!)^2} \dfrac{(k+n)!}{(k-n)!} \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^{n-2}$ ，

所以 $P_k''(1) = \dfrac{(k+2)!}{8(k-2)!} = \dfrac{1}{8}(k+2)(k+1)k(k-1)$ 。

274. 证明： $\displaystyle\int_x^1 P_k(t) P_l(t)\,dt = \dfrac{(1-x^2)\left[P_k'(x)P_l(x) - P_l'(x)P_k(x)\right]}{k(k+1) - l(l+1)}$ ， $k \neq l$ 。

$$\frac{d}{dt} \frac{(1-t^2)\left[P_k'(t)P_l(t) - P_l'(t)P_k(t)\right]}{k(k+1) - l(l+1)} = \frac{1}{k(k+1) - l(l+1)} \Big\{ -2t\left[P_k'(t)P_l(t) - P_l'(t)P_k(t)\right]$$

$$+ (1-t^2)\left[P_k''(t)P_l(t) - P_l''(t)P_k(t)\right] \Big\}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)-l(l+1)} \left\{ P_l(t) \frac{d}{dx} \left[(1-t^2) P_k'(t) \right] \right.$$

$$\left. -P_k(t) \frac{d}{dx} \left[(1-t^2) P_l'(t) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)-l(l+1)} \left[-P_l(t) k(k+1) P_k(t) + P_k(t) l(l+1) P_l(t) \right]$$

$$= -P_l(t) P_k(t) \text{。}$$

两边积分即得证。

275. 计算积分 $\int_{-1}^{1} x^k P_l(x) dx$ ，并由此导出 $\int_{-1}^{1} P_k(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}$ 。

$$\int_{-1}^{1} x^k P_l(x) dx = \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} x^k \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx = \frac{1}{2^l l!} x^k \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} \frac{dx^k}{dx} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l dx$$

其中 $\dfrac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l = \dfrac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} \left[(x+1)^l (x-1)^l \right] = \sum_{k=0}^{l-1} \dfrac{(l-1)!}{k!(l-1-k)!} \left[(x+1)^l \right]^{(l-1-k)} \left[(x-1)^l \right]^{(k)}$ ，

可看出上式中 $(x+1)$ 和 $(x-1)$ 的最低次幂都是 1，所以 $\dfrac{1}{2^l l!} x^k \dfrac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l \Big|_{-1}^{1} = 0$ ，即

$$\int_{-1}^{1} x^k P_l(x) dx = -\frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} \frac{dx^k}{dx} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l dx = (-1)^2 \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} \frac{d^2 x^k}{dx^2} \frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}} (x^2-1)^l dx$$

$$= \cdots = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l \frac{d^l x^k}{dx^l} dx = \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^l \frac{d^l x^k}{dx^l} dx \text{。}$$

若 $k < l$ ，则 $\dfrac{d^l x^k}{dx^l} = 0$ ，所以 $\int_{-1}^{1} x^k P_l(x) dx = 0$ 。

$k \geq l$ 时，若 $k+l$ 是奇数，那么 $x^k P_l(x)$ 是奇函数，一定有 $\int_{-1}^{1} x^k P_l(x) dx = 0$ ，所以可令

$k = l+2n$ （ $n = 0, 1, \cdots$ ），此时 $\int_{-1}^{1} x^{l+2n} P_l(x) dx = \dfrac{1}{2^l l!} \dfrac{(l+2n)!}{(2n)!} \int_{0}^{1} 2(1-x^2)^l x^{2n} dx$ ，

作代换 $x^2 = t$ ，则 $\int_{-1}^{1} x^{l+2n} P_l(x) dx = \dfrac{1}{2^l l!} \dfrac{(l+2n)!}{(2n)!} \int_{0}^{1} (1-t)^l t^{n-1/2} dt = \dfrac{1}{2^l l!} \dfrac{(l+2n)!}{(2n)!} \mathrm{B}\left(l+1, n+\dfrac{1}{2} \right)$

$$= \frac{1}{2^l l!} \frac{(l+2n)!}{(2n)!} \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(l+n+3/2)} = \frac{(l+2n)!}{2^l (2n)!} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(l+n+3/2)} \qquad (*)$$

$$= \frac{(l+2n)!}{2^l(2n)!} \frac{(n-1+1/2)(n-2+1/2)\cdots(1/2)\Gamma(1/2)}{(l+n+1/2)(l+n-1+1/2)\cdots(1/2)\Gamma(1/2)} = \frac{2(l+2n)!(2n-1)!!}{(2n)!(2l+2n+1)!!}$$

$$= \frac{2(l+2n)!(2l+2n)(2l+2n-2)\cdots\cdot 2}{(2n)(2n-2)\cdots\cdot 2\cdot(2l+2n+1)!} = \frac{2(l+2n)!2^{l+n}(l+n)!}{2^n n!(2l+2n+1)!} = \frac{2^{l+1}(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!} \text{。}$$

综上有 $\displaystyle\int_{-1}^1 x^k P_l(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2^{l+1}(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!}, & k=l+2n \\ \\ 0, \text{others} \end{cases}$ 其中 $n=0,1,\cdots$。

取 $n=0$ 可得 $\displaystyle\int_{-1}^1 x^l P_l(x)dx = \frac{2^{l+1}(l!)^2}{(2l+1)!}$。

若 $k<l$，必有 $\displaystyle\int_{-1}^1 P_k(x)P_l(x)dx = 0$。

设 $P_l(x)=c_l x^l + c_{l-2}x^{l-2}+\cdots$，则由 $\displaystyle P_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^r(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}$ 可知 $c_l = \dfrac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$，

则 $\displaystyle\int_{-1}^1 P_l^2(x)dx = \int_{-1}^1\left(c_l x^l + c_{l-2}x^{l-2}+\cdots\right)P_l(x)dx = c_l\int_{-1}^1 x^l P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}$。

即 $\displaystyle\int_{-1}^1 P_k(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$。

276. 利用 Rodrigues 公式证明：$\displaystyle\int_{-1}^1(1+x)^k P_l(x)dx = \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(k-l)!(k+l+1)!}$，$k\geq l$。

若 $k<l$ 又如何？

$$\int_{-1}^1(1+x)^k P_l(x)dx = \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^1(1+x)^k \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx$$

$$= \frac{1}{2^l l!}(1+x)^k \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^1\frac{d(1+x)^k}{dx}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l dx$$

$$= -\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^1\frac{d(1+x)^k}{dx}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l dx = \cdots = \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^1(1-x^2)^l\frac{d^l(1+x)^k}{dx^l}dx \quad (*)$$

$$= \frac{k!}{2^l l!(k-l)!}\int_{-1}^1(1-x^2)^l(1+x)^{k-l}dx = \frac{k!}{2^l l!(k-l)!}\int_{-1}^1(1-x)^l(1+x)^k dx$$

作代换 $1+x=2t$，则上式 $\displaystyle = \frac{2^{k+1}k!}{l!(k-l)!}\int_0^1(1-t)^l t^k dt = \frac{2^{k+1}k!}{l!(k-l)!}\mathrm{B}(l+1,k+1)$

$$= \frac{2^{k+1}k!}{l!(k-l)!} \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(l+k+2)} = \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(k-l)!(l+k+1)!} \, .$$

$k < l$ 时由（*）式可知积分=0。

277．试由 Rodrigues 公式出发，将 Legendre 多项式表示成围道积分，从而导出 Legendre 多项式的积分表示：$P_l(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x \pm \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l d\varphi$。

$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l = \frac{1}{2^l}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left(z^2-1\right)^l}{\left(z-x\right)^{l+1}}dz$，这里用了解析函数的高阶微商公式，

其中 C 为任意包围 x 的围道，这里取为以 x 为圆心，$\sqrt{x^2-1}$ 为半径的圆，即 $z-x=\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}$，

则 $P_l(x) = \frac{1}{2^l}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}+1\right)^l\left(x+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}-1\right)^l}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{l+1}e^{i(l+1)\varphi}}\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}d\varphi$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \left\{\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}\right)\left[(x-1)e^{-i\varphi}+\sqrt{x^2-1}\right]}{2\left(\sqrt{x^2-1}\right)}\right\}^l d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l d\varphi$$

作代换 $\varphi = \pi - \theta$ 即可得 $P_l(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^l d\theta$。

278．证明：$P_l(x)$ 的零点均为实数，且全都在区间 $(-1,1)$ 内。

± 1 是 $\left(x^2-1\right)^l$ 的零点，根据 Rolle 定理，$(-1,1)$ 内有 $\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^l$ 的一个零点（记为 ξ_1）。

又因为 ± 1 也是 $\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^l$ 的零点，所以 $(-1,\xi_1)$ 和 $(\xi_1,1)$ 上有 $\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^l$ 的零点，而 ± 1 又

是 $\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^l$ 的零点……由此下去 $(-1,1)$ 内有 $\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l$ 的 l 个零点，而 ± 1 不是

$\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l$ 的零点。$P_l(x)$ 是 l 次多项式，只能有 l 个零点。

279．设 (x,y,z) 是空间一点坐标，θ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 与 z 轴夹角，$r=|\boldsymbol{r}|$，证明：

$$P_l(\cos\theta) = \frac{(-1)^l \, r^{l+1}}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\frac{1}{r}\right)。$$

用数学归纳法。$l=0$ 时显然成立，设 l 成立，即 $\dfrac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{(-1)^l \, l!}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$。

由直角坐标与球坐标关系可得

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial(\cos\theta)} = x\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-x^2}{r}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{其中 } x = \cos\theta。$$

所以 $\dfrac{\partial^{l+1}}{\partial z^{l+1}}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{(-1)^l \, l!}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)\right] = \left(x\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1-x^2}{r}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\left[\dfrac{(-1)^l \, l!}{r^{l+1}} P_l(x)\right]$

$$= \frac{(-1)^l \, l!}{r^{l+2}}\Big[-(l+1)xP_l(x) + (1-x^2)P_l'(x)\Big]。$$

所以 $\dfrac{(-1)^{l+1} r^{l+2}}{(l+1)!}\dfrac{\partial^{l+1}}{\partial z^{l+1}}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{l+1}\Big[-(l+1)xP_l(x) + (1-x^2)P_l'(x)\Big] = P_{l+1}(x)。$

280. 从 Lengendre 多项式的生成函数出发证明：（1）$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$；

（2）$P_l\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2l} P_k\left(-\dfrac{1}{2}\right) P_{2l-k}\left(\dfrac{1}{2}\right)$；（3）$P_l(\cos 2\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2l}(-1)^k P_k(\cos\theta) P_{2l-k}(\cos\theta)$；

（4）$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_k(x) P_l(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$。

（1）$\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l P_l(-x)t^l$，

所以 $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$。

（2）令（3）中 $\theta = \pi/3$ 即得。

（3）$\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos 2\theta)t^l = \frac{1}{\sqrt{1-2t\cos 2\theta+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2t(2\cos^2\theta-1)+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t)^2 - 4t\cos^2\theta}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2\sqrt{t}\cos\theta+t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2\sqrt{t}\cos\theta+t}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\theta)\left(-\sqrt{t}\right)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left(\sqrt{t}\right)^l$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k P_k(\cos\theta) P_{l-k}(\cos\theta)t^{l/2} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2l}(-1)^k P_k(\cos\theta) P_{2l-k}(\cos\theta)t^l。$$

所以 $P_l(\cos 2\theta) = \sum_{k=0}^{2l}(-1)^k P_k(\cos\theta)P_{2l-k}(\cos\theta)$。

（4） $\dfrac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l \cdot \sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)t^k = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)P_l(x)t^k\right]t^l$。

两边积分得 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{1-2xt+t^2}dx = \dfrac{1}{t}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right] = \dfrac{1}{t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}t^k + \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}t^k\right]$

$= \sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{2}{2l+1}t^{2l} = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx\,t^k\right]t^l$。

所以 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx\,t^k = \dfrac{2}{2l+1}t^l$，即 $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx = \dfrac{2}{2l+1}\delta_{kl}$。

281. 证明：$P_l(\cos\theta) = \dfrac{1}{2^{2l}}\sum_{k=0}^{l}\dfrac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\cos(l-2k)\theta$。

$\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)t^l = \dfrac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)+t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-te^{i\theta}}}\dfrac{1}{\sqrt{1-te^{-i\theta}}}$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(-te^{i\theta}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(-te^{-i\theta}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!(2k)!}{2^{2(n+k)}(n!)^2(k!)^2}t^{n+k}e^{i(n-k)\theta}$。

令上式右边 $n+k=l$，则

$\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)t^l = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\dfrac{(2l-2k)!(2k)!}{2^{2l}(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}e^{i(l-2k)\theta}t^l$

$= \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\dfrac{(2l-2k)!(2k)!}{2^{2l}(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\cos(l-2k)\theta\,t^l + i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\dfrac{(2l-2k)!(2k)!}{2^{2l}(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\sin(l-2k)\theta\,t^l$。

对于上式右边第二项，当 l 为偶数（$=2m$）时，

$\displaystyle\sum_{k=0}^{l}\dfrac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\sin(l-2k)\theta = \sum_{k=0}^{m-1}\dfrac{(4m-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(2m-k)!\right]^2}\sin(2m-2k)\theta$

$+ \displaystyle\sum_{k=m+1}^{2m}\dfrac{(4m-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(2m-k)!\right]^2}\sin(2m-2k)\theta$

令上面右边第二式 $n=2m-k$ 可得 $\displaystyle\sum_{k=0}^{l}\dfrac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\sin(l-2k)\theta = 0$，

当 l 为奇数时同样有 $\sum_{k=0}^{l} \dfrac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2 \left[(l-k)! \right]^2} \sin(l-2k)\theta = 0$。

所以 $\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) t^l = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \dfrac{(2l-2k)!(2k)!}{2^{2l}(k!)^2 \left[(l-k)! \right]^2} \cos(l-2k)\theta \, t^l$，比较系数即得

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^{2l}} \sum_{k=0}^{l} \frac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2 \left[(l-k)! \right]^2} \cos(l-2k)\theta 。$$

282. 如果 $|x|$ 足够小，且 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_k}{k!} x^k$，证明：$f(x)$ 可按 Lengendre 多项式展开：

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)，\text{其中 } c_l = (2l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2) a_{l+2n}}{2^{l+2n} n! \Gamma(l+n+3/2)} 。$$

由 Lengendre 展开系数公式，$c_l = \dfrac{2l+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_k}{k!} \int_{-1}^{1} x^k P_l(x) dx$。由 275 题可知，只有 $k = l+2n$

时，该式右边的积分才不为 0，即 $c_l = \dfrac{2l+1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{l+2n}}{(l+2n)!} \int_{-1}^{1} x^{l+2n} P_l(x) dx$。

由 275 题（＊）式，$\int_{-1}^{1} x^{l+2n} P_l(x) dx = \dfrac{(l+2n)!}{2^l (2n)!} \dfrac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(l+n+3/2)}$

$$= \frac{(l+2n)!}{2^l (2n)! \Gamma(l+n+3/2)} \left(n-1+\frac{1}{2} \right)\left(n-2+\frac{1}{2} \right) \cdots \left(1+\frac{1}{2} \right) \Gamma\left(\frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{(l+2n)!}{2^{l+n-1}(2n)! \Gamma(l+n+3/2)}(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \Gamma\left(\frac{3}{2} \right) = \frac{(l+2n)! \Gamma(3/2)}{2^{l+2n-1} n! \Gamma(l+n+3/2)} 。$$

所以 $c_l = \dfrac{2l+1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{l+2n}}{(l+2n)!} \dfrac{(l+2n)! \Gamma(3/2)}{2^{l+2n-1} n! \Gamma(l+n+3/2)} = (2l+1) \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\Gamma(3/2) a_{l+2n}}{2^{l+2n} n! \Gamma(l+n+3/2)}$。

283. 计算下列积分：（1）$\int_{-1}^{1} P_k'(x) P_l(x) dx$；（2）$\int_{-1}^{1} \dfrac{P_l(x)}{\left(1-2xt+t^2 \right)^{3/2}} dx$。

（1）$P_k'(x)$ 是 $k-1$ 次多项式，所以当 $k \leq l$ 时 $\int_{-1}^{1} P_k'(x) P_l(x) dx = 0$。$k > l$ 时，

$$\int_{-1}^{1} P_k'(x) P_l(x) dx = P_k(x) P_l(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_k(x) P_l'(x) dx = P_k(x) P_l(x)\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1)^{k+l} 。$$

所以当 $k = l + 2n + 1$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）时，积分值为 2，其余都为 0。

（2）$t = 0$ 时，原积分 $= \int_{-1}^{1} P_l(x) dx = \int_{-1}^{1} P_0(x) P_l(x) dx = 2\delta_{l0}$。

$t \neq 0$ 时，原积分 $= \dfrac{1}{t} \int_{-1}^{1} P_l(x) d\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \dfrac{1}{t} \left. \dfrac{P_l(x)}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} \right|_{-1}^{1} - \dfrac{1}{t} \int_{-1}^{1} \dfrac{P_l'(x)}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} dx$

$$= \dfrac{1}{t} \left[\dfrac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} - \dfrac{(-1)^l}{\sqrt{(1+t)^2}} \right] - \dfrac{1}{t} \int_{-1}^{1} \dfrac{P_l'(x)}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} dx \text{。}$$

当 $|t| < 1$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k$，所以

$$\text{原积分} = \dfrac{1}{t} \left[\dfrac{1}{1-t} - \dfrac{(-1)^l}{1+t} \right] - \dfrac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^{1} P_l'(x) P_k(x) dx \right] t^k = \dfrac{1}{t} \left[\dfrac{1}{1-t} - \dfrac{(-1)^l}{1+t} \right] - \dfrac{2}{t} \sum_{n=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} t^{l-2n-1} \text{。}$$

这里用到了上小题结论。对上式分别代入 l 为奇数和偶数可得原积分 $= \dfrac{2t^l}{1 - t^2}$。

当 $|t| > 1$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \dfrac{1}{|t| \sqrt{1 - 2x \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}} = \dfrac{1}{|t|} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^{-k}$，

$t > 1$ 时，原积分 $= \dfrac{1}{t} \left[\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{(-1)^l}{t+1} \right] - \dfrac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^{1} P_l'(x) P_k(x) dx \right] t^{-k}$

$$= \dfrac{1}{t} \left[\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{(-1)^l}{t+1} \right] - \dfrac{2}{t^2} \sum_{n=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} t^{2n-l+1} = \dfrac{2}{t^{l+1}(t^2 - 1)} \text{。}$$

$t < -1$ 时，原积分 $= \dfrac{1}{t} \left[\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{(-1)^l}{1+t} \right] + \dfrac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^{1} P_l'(x) P_k(x) dx \right] t^{-k}$

$$= \dfrac{1}{t} \left[\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{(-1)^l}{1+t} \right] + \dfrac{2}{t^2} \sum_{n=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} t^{2n-l+1} = \dfrac{2}{t^{l+1}(1 - t^2)} \text{。}$$

284．证明：对于足够小的 $|t|$，下式成立：$\dfrac{1 - t^2}{\left(1 - 2xt + t^2\right)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l(x) t^l$。

$$\frac{1-t^2}{\left(1-2xt+t^2\right)^{3/2}} = \left(\frac{1}{t}-t\right)\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \left(\frac{1}{t}-t\right)\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(x)t^l$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}P_l'(x)t^{l-1} - \sum_{l=0}^{\infty}P_l'(x)t^{l+1} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty}P_{l+1}'(x)t^l - \sum_{l=1}^{\infty}P_{l-1}'(x)t^l$$

$$= 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left[P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)\right]t^l = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x)t^l \, 。$$

285. 利用 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \dfrac{1}{1-xt}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2\left(x^2-1\right)\big/\left(1-xt\right)^2}}$ 证明：

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{l!}{2^{2k}\left(k!\right)^2\left(l-2k\right)!}\left(x^2-1\right)^k x^{l-2k} \, 。$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{1-xt}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{t^2\left(x^2-1\right)}{\left(1-xt\right)^2}}} = \frac{1}{1-xt}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\dfrac{1}{2}}{k}\left[\frac{-t^2\left(x^2-1\right)}{\left(1-xt\right)^2}\right]^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}\left(k!\right)^2}t^{2k}\left(x^2-1\right)^k\left(1-xt\right)^{-2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!t^{2k}\left(x^2-1\right)^k}{2^{2k}\left(k!\right)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2k-1}{n}\left(-xt\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{2^{2k}\left(k!\right)^2 n!}\left(x^2-1\right)^k x^n t^{2k+n} \, 。$$

令 $2k+n=l$，则上式 $= \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{l!}{2^{2k}\left(k!\right)^2\left(l-2k\right)!}\left(x^2-1\right)^k x^{l-2k}t^l$，

所以 $P_l(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{l!}{2^{2k}\left(k!\right)^2\left(l-2k\right)!}\left(x^2-1\right)^k x^{l-2k} \, 。$

286. 利用上题结果证明：$e^{xt}J_0\left(t\sqrt{1-x^2}\right) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l(x)}{l!}t^l$，其中 $J_0(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left(k!\right)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$。

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l(x)}{l!}t^l = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{1}{2^{2k}\left(k!\right)^2\left(l-2k\right)!}\left(x^2-1\right)^k x^{l-2k}t^l，\quad 令\ 2k+n=l，\ 则$$

上式 $= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} (k!)^2 n!} (x^2-1)^k x^n t^{2k+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{2} \right)^{2k}$

$$= e^{xt} J_0 \left(t\sqrt{1-x^2} \right) 。$$

287. 在上题中分别令 $x = \cos\alpha$，$t = r\sin\beta$ 及 $x = \cos\beta$，$t = r\sin\alpha$，从而推出：

$$P_l(\cos\alpha) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \right)^l \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{k!(l-k)!} \left[\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} \right]^{l-k} P_k(\cos\beta) 。$$

上题中分别令 $x = \cos\alpha$，$t = r\sin\beta$ 及 $x = \cos\beta$，$t = r\sin\alpha$ 可得：

$$e^{r\cos\alpha\sin\beta} J_0(r\sin\alpha\sin\beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos\alpha)\sin^l\beta}{l!} r^l ，$$

$$e^{r\sin\alpha\cos\beta} J_0(r\sin\alpha\sin\beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos\beta)\sin^l\alpha}{l!} r^l 。$$

由以上两式消去 $J_0(r\sin\alpha\sin\beta)$ 可得

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos\alpha)\sin^l\beta}{l!} r^l = e^{r\sin(\beta-\alpha)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos\beta)\sin^l\alpha}{l!} r^l$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^k(\beta-\alpha)}{k!} r^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos\beta)\sin^l\alpha}{l!} r^l = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \frac{P_k(\cos\beta)\sin^k\alpha}{k!} r^k \frac{\sin^{l-k}(\beta-\alpha)}{(l-k)!} r^{l-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!(l-k)!} \sin^k\alpha \sin^{l-k}(\beta-\alpha) P_k(\cos\beta) r^l 。$$

两边比较系数得 $\dfrac{P_l(\cos\alpha)\sin^l\beta}{l!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!(l-k)!} \sin^k\alpha \sin^{l-k}(\beta-\alpha) P_k(\cos\beta)$，

即 $P_l(\cos\alpha) = \left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \right)^l \displaystyle\sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{k!(l-k)!} \left[\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} \right]^{l-k} P_k(\cos\beta) 。$

288. 计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2) P_k'(x) P_l'(x) dx$；（2）$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_k'(x) P_l'(x) dx$。

（1）原积分 $= (1-x^2) P_k(x) P_l'(x) \Big|_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1} P_k(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) P_l'(x) \right] dx$

$$= l(l+1)\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(k)\,dx = \frac{2l(l+1)}{2l+1}\delta_{kl}\,\text{。}$$

（2）不妨设 $k \geq l$，则原积分

$$= P_k(x)P_l'(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}P_k(x)P_l''(x)\,dx = \frac{1}{2}l(l+1)\left[1-(-1)^{l+k+1}\right]\text{。}$$

当 $k+l$ 为偶数时，积分值为 $l(l+1)$，$k+l$ 为奇数时，积分值为 0。

289. 计算下列积分：（1）$\int_{0}^{1}P_k(x)P_l(x)\,dx$；（2）$\int_{-1}^{1}xP_k(x)P_{k+1}(x)\,dx$；

（3）$\int_{-1}^{1}x^2P_k(x)P_{k+2}(x)\,dx$；（4）$\int_{-1}^{1}\left[xP_k(x)\right]^2\,dx$。

（1）当 $k+l$ 为偶数时，$\int_{0}^{1}P_k(x)P_l(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)\,dx = \frac{1}{2l+1}\delta_{kl}$。 （**）

当 $k+l$ 为奇数时，设 $k=2n$，$l=2m+1$，令 274 题中 $x=0$ 得

$$\int_{0}^{1}P_k(t)P_l(t)\,dt = \frac{P_{2n}'(0)P_{2m+1}(0) - P_{2m+1}'(0)P_{2n}(0)}{2n(2n+1)-(2m+1)(2m+2)}$$

$$= \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)(2m+2)-2n(2n+1)}\frac{(2n)!(2m+1)!}{2^{2(m+n)}(m!)^2(n!)^2}\text{。} \tag{*}$$

（2）由递推关系，$xP_k(x) = \frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)$，

原积分 $= \frac{k+1}{2k+1}\int_{-1}^{1}P_{k+1}^2(x)\,dx + \frac{k}{2k+1}\int_{-1}^{1}P_{k-1}(x)P_{k+1}(x)\,dx = \frac{2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$。

（3）$xP_{k+2}(x) = \frac{k+3}{2k+5}P_{k+3}(x) + \frac{k+2}{2k+5}P_{k+1}(x)$，原积分

$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)\right]\left[\frac{k+3}{2k+5}P_{k+3}(x) + \frac{k+2}{2k+5}P_{k+1}(x)\right]dx$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+5)}\int_{-1}^{1}P_{k+1}^2(x)\,dx = \frac{2(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\text{。}$$

（4）原积分

$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)\right]^2 dx = \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^2\int_{-1}^{1}P_{k+1}^2(x)\,dx + \left(\frac{k}{2k+1}\right)^2\int_{-1}^{1}P_{k-1}^2(x)\,dx$$

$$= \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^2\frac{2}{2k+3} + \left(\frac{k}{2k+1}\right)^2\frac{2}{2k-1} = \frac{2(2k^2+2k-1)}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)}\text{。}$$

290. 将下列函数按 Legendre 多项式展开：（1）$f(x)=x^2$；（2）$f(x)=|x|$；

（3）$f(x)=\begin{cases}0,-1\le x<0\\x,0\le x\le 1\end{cases}$ ；（4）$f(x)=\sqrt{1-2xt+t^2}$ 。

（1）$f(x)=a_2P_2(x)+a_0P_0(x)$，$a_2=\dfrac{5}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2P_2(x)dx=\dfrac{2}{3}$，$a_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2dx=\dfrac{1}{3}$，

即 $f(x)=\dfrac{2}{3}P_2(x)+\dfrac{1}{3}P_0(x)$。

（2）$f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}P_{2k}(x)$。

$a_{2k}=\dfrac{4k+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}|x|P_{2k}(x)dx=(4k+1)\int_{0}^{1}xP_{2k}(x)dx=(4k+1)\int_{0}^{1}P_1(x)P_{2k}(x)dx$，

由上题（*）式得 $a_{2k}=\dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2k+1}(k!)^2(k+1)(2k-1)}$。

即 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2k+1}(k!)^2(k+1)(2k-1)}P_{2k}(x)$。

（3）$f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}|x|=\dfrac{1}{2}P_1(x)+\dfrac{1}{2}|x|=\dfrac{1}{2}P_1(x)+\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2(k+1)}(k!)^2(k+1)(2k-1)}P_{2k}(x)$。

（4）记 $F(x,u)=\sqrt{1-2xu+u^2}$ ，则

$\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial u}=\dfrac{u-x}{\sqrt{1-2xu+u^2}}=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)u^{l+1}-\sum_{l=0}^{\infty}xP_l(x)u^l$

$\qquad=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)u^{l+1}-P_1(x)-\sum_{l=1}^{\infty}\dfrac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(x)u^l-\sum_{l=1}^{\infty}\dfrac{l}{2l+1}P_{l-1}(x)u^l$

$\qquad=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)u^{l+1}-P_1(x)-\sum_{l=2}^{\infty}\dfrac{l}{2l-1}P_l(x)u^{l-1}-\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{l+1}{2l+3}P_l(x)u^{l+1}$

$\qquad=\dfrac{2}{3}uP_0(x)+\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\left(\dfrac{l+2}{2l+3}u^{l+1}-\dfrac{l}{2l-1}u^{l-1}\right)P_l(x)$。

两边对 u 从 0 积到 t 得

$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}t^2+1\right)P_0(x)+\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\left(\dfrac{t^{l+2}}{2l+3}-\dfrac{t^l}{2l-1}\right)P_l(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{t^{l+2}}{2l+3}-\dfrac{t^l}{2l-1}\right)P_l(x)$。

291. 定义 $Q_l(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P_l(t)}{x-t}dt$，（1）证明 $Q_l(x)$ 是 Legendre 方程的解；

（2）求出 $Q_0(x)$，$Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 的表达式。

（1）$\dfrac{dQ_l(x)}{dx} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P_l(t)}{(x-t)^2}dt$，

$\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dQ_l(x)}{dx}\right] = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}P_l(t)\dfrac{d}{dx}\dfrac{1-x^2}{(x-t)^2}dt = -\displaystyle\int_{-1}^{1}P_l(t)\dfrac{xt-1}{(x-t)^3}dt$。

$l(l+1)Q_l(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{l(l+1)P_l(t)}{x-t}dt = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x-t}\dfrac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_l'(t)\right]dt$

$\qquad = -\dfrac{1}{x-t}(1-t^2)P_l'(x)\Big|_{-1}^{1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}P_l'(t)\dfrac{1-t^2}{(x-t)^2}dt$

$\qquad = \dfrac{1}{2}P_l(t)\dfrac{1-t^2}{(x-t)^2}\Big|_{-1}^{1} + \displaystyle\int_{-1}^{1}P_l(t)\dfrac{xt-1}{(x-t)^3}dt = \displaystyle\int_{-1}^{1}P_l(t)\dfrac{xt-1}{(x-t)^3}dt$。

所以 $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dQ_l(x)}{dx}\right] + l(l+1)Q_l(x) = 0$。

（2）若 $x\in(-1,1)$，则 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P_l(t)}{x-t}dt$ 是暇积分，这时取其主值。

$Q_0(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x-t}dt = -\dfrac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln|x-t|\Big\|_{-1}^{x-\varepsilon} + \ln|x-t|\Big\|_{x+\varepsilon}^{1}\right] = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$。

$Q_1(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{t}{x-t}dt = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(1-\dfrac{x}{x-t}\right)dt = -1 + xQ_0(x) = \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} - 1$。

$Q_2(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P_2(t)}{x-t}dt = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{tP_1(t)}{x-t}dt - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P_0(t)}{x-t}dt$

$\qquad = \dfrac{3x}{2}Q_1(x) - \dfrac{1}{2}Q_0(x) = \dfrac{1}{4}(3x^2-1)\ln\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3}{2}x$。

$x>1$ 或 $x<-1$ 时也可得上面结果。

292. 求解下列本征值问题：（1）$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0 \\ y(0)=0,\ y(1)\text{有界}\end{cases}$；（2）$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0 \\ y'(0)=0,\ y(1)\text{有界}\end{cases}$。

令 $\lambda = \nu(\nu+1)$，求出方程在 $x=0$ 的两个独立级数解：

$$y_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1+\nu)(2n-3+\nu)\cdots(1+\nu)}{(2n)!}\left[2(n-1)-\nu\right]\left[2(n-2)-\nu\right]\cdots(-\nu)x^{2n},$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+\nu)(2n-2+\nu)\cdots(2+\nu)}{(2n+1)!}\left[2(n-1)+1-\nu\right]\left[2(n-2)+1-\nu\right]\cdots(1-\nu)x^{2n+1}.$$

$y_0(x)$ 为偶函数，$y_1(x)$ 为奇函数。一般地，$y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 在 $x=\pm1$ 是发散的。

（1）为使 $y(0)=0$，只能取 $y_1(x)$。当 $\nu=2l+1$（$l=0,1,\cdots$）时，因子

$$\left[2(n-1)+1-\nu\right]\left[2(n-2)+1-\nu\right]\cdots(1-\nu) = \left[2(n-1)-2l\right]\left[2(n-2)-2l\right]\cdots(-2l)$$

当 $n>l$ 时为 0，即 $y_1(x)$ 截断为多项式：

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{(2l+2n+1)(2l+2n-1)\cdots(2l+3)}{(2n+1)!}(-1)^n(2l)(2l-2)\cdots\left[2l-2(n-1)\right]x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{l} \frac{(2l+2n+2)!}{2^{n+1}(2n+1)!(l+n+1)(l+n)\cdots(l+1)(2l+1)!}\frac{(-1)^n 2^n l!}{(l-n)!}x^{2n+1}$$

$$= (-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}\sum_{n=0}^{l} \frac{(-1)^{l+n}(2l+2n+2)!}{2^{2l+1}(l-n)!(l+n+1)!(2n+1)!}x^{2n+1},$$

令 $n=l-k$，则

$$y_1(x) = (-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}\sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k(4l-2k+2)!}{2^{2l+1}k!(2l-k+1)!(2l-2k+1)!}x^{2l+1-2k} = (-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}P_{2l+1}(x)$$

所以本征值 $\lambda_l=(2l+1)(2l+2)$，本征函数 $y_l(x)=P_{2l+1}(x)$（$l=0,1,\cdots$）。

（2）为使 $y'(0)=0$，只能取 $y_0(x)$。当 $\nu=2l$（$l=0,1,\cdots$）时，$y_0(x)$ 截断为多项式：

$$y_0(x) = (-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!}\sum_{n=0}^{l} \frac{(-1)^{l+n}(2l+2n)!}{2^{2l}(l-n)!(l+n)!(2n)!}x^{2n}$$

$$= (-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!}\sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k(4l-2k)!}{2^{2l}k!(2l-k)!(2l-2k)!}x^{2l-2k} = (-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!}P_{2l}(x).$$

所以本征值 $\lambda_l=2l(2l+1)$，本征函数 $y_l(x)=P_{2l}(x)$（$l=0,1,\cdots$）。

293. 求解球内定解问题：$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, r < a \\ u\big|_{r=a} = \begin{cases} u_0, 0 \le \theta \le \alpha \\ 0, \alpha < \theta \le \pi \end{cases} \end{cases}$。

将 $r = a$ 的边界条件展开成 Legendre 级数：$u\big|_{r=a} = \begin{cases} u_0, 0 \le \theta \le \alpha \\ 0, \alpha < \theta \le \pi \end{cases} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\theta)$，则

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^\alpha u_0 \sin\theta d\theta = \frac{u_0}{2}(1 - \cos\alpha)。$$

$l > 0$ 时，$c_l = \frac{2l+1}{2}u_0 \int_0^\alpha P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2l+1}{2}u_0 \int_{\cos\alpha}^1 P_l(x)dx$

$= \frac{1}{2}u_0\left[\int_{\cos\alpha}^1 P'_{l+1}(x)dx - \int_{\cos\alpha}^1 P'_{l-1}(x)dx\right] = \frac{1}{2}u_0\left[P_{l-1}(\cos\alpha) - P_{l+1}(\cos\alpha)\right]。$

可看出问题与 φ 无关。分离变量可得本征函数 $\Theta_l(\theta) = P_l(\cos\theta)$（$l = 0, 1, \cdots$）。

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta)，$$ 由于 $u(0,\theta)$ 有界，所以 $B_l = 0$，即

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)。$$ 所以 $u(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\theta)，$

比较系数得 $A_0 = c_0 = \frac{u_0}{2}(1-\cos\alpha)$，$A_l = \frac{c_l}{a^l} = \frac{u_0}{2a^l}\left[P_{l-1}(\cos\alpha) - P_{l+1}(\cos\alpha)\right]$，所以

$$u(r,\theta) = \frac{u_0}{2}(1-\cos\alpha) + \frac{u_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left[P_{l-1}(\cos\alpha) - P_{l+1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta)。$$

294. 求解习题 11 第 208 题，假定温度已达稳定。$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, r < a \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{H}{k}u\right)\Big|_{r=a} = \begin{cases} \dfrac{M}{k}\cos\theta, 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0, \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases} \end{cases}$

令 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{H}{k}u\right)\Big|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\theta)$，则

$$c_l = \frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{M}{k}\cos\theta P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2l+1}{2}\frac{M}{k}\int_0^1 P_1(x)P_l(x)dx。$$

由 289 题（**）式，$c_1 = \dfrac{M}{2k}$，由 289 题（*）式，

$$c_{2n} = \frac{4n+1}{2}\frac{M}{k}\int_0^1 P_1(x)P_{2n}(x)dx = \frac{M}{2k}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n)!}{2^{2n+1}(2n-1)(n+1)(n!)^2}。（n = 0, 1, \cdots）$$

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{H}{k} u\right)\bigg|_{r=a} = \frac{H}{k} A_0 + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left(la^{l-1} + \frac{H}{k} a^l\right) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\theta),$$

对比系数得 $A_1 = \dfrac{M}{2} \dfrac{1}{Ha+k}$,

$$A_{2n} = \frac{kc_{2n}}{H + \dfrac{2nk}{a}} \frac{1}{a^{2n}} = \frac{M}{2} \frac{1}{H + \dfrac{2nk}{a}} \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n)!}{2^{2n+1}(2n-1)(n+1)(n!)^2} \frac{1}{a^{2n}} \quad (n = 0,1,\cdots)\text{。}$$

$$u(r,\theta) = \frac{M}{2\left(H + \dfrac{k}{a}\right)} \frac{r}{a} P_1(\cos\theta) + \frac{M}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{H + \dfrac{2nk}{a}} \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n)!}{2^{2n+1}(2n-1)(n+1)(n!)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)\text{。}$$

295. 求解下列定解问题：$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, a < r < b \\ u|_{r=a} = u_0, u|_{r=b} = u_0 \cos^2\theta \end{cases}$。

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta),$$

$$u|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) = u_0 P_0(\cos\theta),$$

$$u|_{r=b} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l b^l + \frac{B_l}{b^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) = u_0 \cos^2\theta = \frac{1}{3} u_0 P_0(\cos\theta) + \frac{2}{3} u_0 P_2(\cos\theta)\text{。}$$

比较系数得 $A_0 = \dfrac{b-3a}{3(b-a)} u_0$，$B_0 = \dfrac{2ab}{3(b-a)} u_0$，$A_2 = \dfrac{2b^3}{3(b^5-a^5)} u_0$，$B_2 = \dfrac{2a^5 b^3}{3(a^5-b^5)} u_0$，

其他 $A_l = 0$，$B_l = 0$。所以

$$u(r,\theta) = \frac{b-3a}{3(b-a)} u_0 + \frac{2b}{3(b-a)} \frac{a}{r} u_0 + \frac{2b^3 a^2 u_0}{3(b^5-a^5)} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] P_2(\cos\theta)\text{。}$$

296．解习题 11 第 209 题：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\omega^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2 - x^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} \text{ 有界} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

分离变量得 $\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\left(l^2 - x^2\right)\dfrac{dX(x)}{dx}\right] + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \dfrac{\omega^2}{2}\lambda T(t) = 0 \end{cases}$ 。可得本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\left(l^2 - x^2\right)\dfrac{dX}{dx}\right] + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(l) \text{ 有界} \end{cases}$，

令 $u = \dfrac{x}{l}$，用 y 表示 X，则 $\begin{cases} \dfrac{d}{du}\left[\left(1 - u^2\right)\dfrac{dy}{du}\right] + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(1) \text{ 有界} \end{cases}$ 。

第 292 题第（1）小题已得出 $\lambda_k = (2k+1)(2k+2)$，$y_k(u) = P_{2k+1}(u)$（$k = 0,1,\cdots$），

所以 $X_k(x) = P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right)$。

可解出 $T_k(t) = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t$，其中 $\omega_k = \sqrt{(k+1)(2k+1)}\,\omega$。

所以 $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t\right) P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right)$。

由 289 题（**）式可得 $\displaystyle\int_0^1 P_{2k+1}(x) P_{2n+1}(x)\, dx = \dfrac{1}{4k+3}\delta_{kn}$，

所以有 $\displaystyle\int_0^l P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right) P_{2n+1}\left(\dfrac{x}{l}\right) dx = \dfrac{l}{4k+3}\delta_{kn}$。

由初始条件以及上式的正交性可定出 $A_k = \dfrac{4k+3}{l\omega_k}\displaystyle\int_0^l \psi(x) P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right) dx$，

$B_k = \dfrac{4k+3}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x) P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right) dx$。

297．设有一半径为 a 的导体半球，球面温度为 $1°\mathrm{C}$，底面温度为 $0°\mathrm{C}$，求半球内的稳定温度

分布。$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, r < a \\ u\big|_{\theta=\pi/2} = 0, u\big|_{r=a} = 1 \end{cases}$

分离变量可得本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)\text{有界},\Theta(\pi/2)=0 \end{cases}$ ，则

本征值 $\lambda_l=(2l+1)(2l+2)$ ，本征函数 $\Theta_l(\theta)=P_{2l+1}(\cos\theta)$ （ $l=0,1,\cdots$ ）。

所以 $u(r,\theta)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^{2l+1}P_{2l+1}(\cos\theta)$ 。

由 289 题（**）式可得 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}P_{2k+1}(\cos\theta)P_{2l+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\dfrac{1}{4l+3}\delta_{kl}$ 。

由 289 题（*）式可得 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}P_0(\cos\theta)P_{2l+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\dfrac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l+1}(l+1)(l!)^2}$ 。

由初始条件定出 $A_l=\dfrac{(-1)^l(2l)!(4l+3)}{2^{2l+1}(l+1)(l!)^2}\dfrac{1}{a^{2l+1}}$ ，所以

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^l(2l)!(4l+3)}{2^{2l+1}(l+1)(l!)^2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2l+1}P_{2l+1}(\cos\theta) 。$$

298．一个均匀圆盘，总质量 M ，半径 a ，求空间引力势。
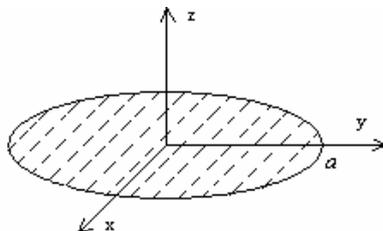
$$\begin{cases} \nabla^2 u=\dfrac{4GM}{a^2}\dfrac{1}{r}\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\eta(a-r) \\ u|_{\theta=0}\text{有界},\ u|_{\theta=\pi}\text{有界} \\ u|_{r=0}\text{有界},\ u|_{r\to\infty}=0 \end{cases} 。$$

将 $\delta(\theta-\pi/2)$ 展开成 Legendre 级数： $\delta(\theta-\pi/2)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}c_l P_l(\cos\theta)$ ，则

$$c_l=\dfrac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\dfrac{2l+1}{2}P_l(0) ，$$

即 $\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta)$ 。

用 u_1 表示 $r < a$ 的 u ， u_2 表示 $r > a$ 的 u ， 则

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = \dfrac{4GM}{a^2} \dfrac{1}{r} \delta\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ u_1\big|_{\theta=0} \text{ 有界}, u_1\big|_{\theta=\pi} \text{ 有界}, u_1\big|_{r=0} \text{ 有界} \end{cases}, \quad \begin{cases} \nabla^2 u_2 = 0 \\ u_2\big|_{\theta=0} \text{ 有界}, u_2\big|_{\theta=\pi} \text{ 有界}, u_2\big|_{r\to\infty} = 0 \end{cases},$$

连接条件 $u_1\big|_{r=a-0} = u_2\big|_{r=a+0}$ ， $\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a-0} = \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a+0}$ 。

u_2 解为 $u_2(r,\theta) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$ 。

将 u_1 展开为 $u_1(r,\theta) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos\theta)$ ，代入 u_1 方程得

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l \right] P_l(\cos\theta) = \frac{4GM}{a^2 r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(0) P_l(\cos\theta) ,$$

即 $\dfrac{1}{r^2} \dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dR_l}{dr} \right) - \dfrac{l(l+1)}{r^2} R_l = \dfrac{4GM}{a^2 r} \dfrac{2l+1}{2} P_l(0)$ 。

可解得 $R_l(r) = A_l r^l - \dfrac{2GM}{a^2} \dfrac{2l+1}{(l+2)(l-1)} P_l(0) r$ ，这里已去掉了无界项 $\dfrac{1}{r^{l+1}}$ 。

所以 $u_1(r,\theta) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l - \dfrac{2GM}{a^2} \dfrac{2l+1}{(l+2)(l-1)} P_l(0) r \right] P_l(\cos\theta)$ 。

由连接条件可得 $A_l a^l - \dfrac{2GM}{a} \dfrac{2l+1}{(l+2)(l-1)} P_l(0) = \dfrac{B_l}{a^{l+1}}$ ，

$lA_l a^{l-1} - \dfrac{2GM}{a^2} \dfrac{2l+1}{(l+2)(l-1)} P_l(0) = -\dfrac{(l+1)B_l}{a^{l+2}}$ （ $l = 0,1,\cdots$ ）。

解得 $A_l = \dfrac{2GM}{a(l-1)} P_l(0) \dfrac{1}{a^l}$ ， $B_l = -\dfrac{2GM}{a(l+2)} P_l(0) a^{l+1}$ 。

再由 $P_{2k}(0) = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$ ， $P_{2k+1}(0) = 0$ 可得

$$u_1(r,\theta) = \frac{2GM}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k} - \frac{4k+1}{(2k+2)(2k-1)} \frac{r}{a} \right] \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2} P_{2k}(\cos\theta) ,$$

$$u_2(r,\theta) = -\frac{GM}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k+1)(k!)^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1} P_{2k}(\cos\theta)。$$

299．有一半径为 b 的接地导体球壳，球壳内放一圆环，环半径为 a，环心与球心重合，环上均匀带电，总电荷为 Q。求球内电势。

以球心为圆点，垂直于环面的轴为 z 轴。$\begin{cases} \nabla^2 u = -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\delta(r-a)\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ u\big|_{\theta=0} \text{有界}, u\big|_{\theta=\pi} \text{有界} \\ u\big|_{r=0} \text{有界}, u\big|_{r=b} = 0 \end{cases}$。

用 u_1 表示 $r < a$ 的 u，u_2 表示 $a < r < b$ 的 u，则

$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = 0 \\ u_1\big|_{\theta=0} \text{有界}, u_1\big|_{\theta=\pi} \text{有界}, u_1\big|_{r=0} \text{有界} \end{cases}$，$\begin{cases} \nabla^2 u_2 = 0 \\ u_2\big|_{\theta=0} \text{有界}, u_2\big|_{\theta=\pi} \text{有界}, u_2\big|_{r=b} = 0 \end{cases}$，

u 在 $r = a$ 处是关于 r 连续的，即 $u_1\big|_{r=a-0} = u_2\big|_{r=a+0}$，否则原方程右边会出现 $\delta'(r-a)$ 项。

原方程写为：$\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -\dfrac{r^2 Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\delta(r-a)\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

两边对 r 在 $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 上积分，取极限得

$$\frac{\partial u_2}{\partial r}\bigg|_{r=a+0} - \frac{\partial u_1}{\partial r}\bigg|_{r=a-0} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta)。$$

综上，连接条件为 $\begin{cases} u_1\big|_{r=a-0} = u_2\big|_{r=a+0} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial r}\bigg|_{r=a+0} - \dfrac{\partial u_1}{\partial r}\bigg|_{r=a-0} = -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta) \end{cases}$。

可得 $u_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$，$u_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(B_l r^l + \dfrac{C_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$。

由边界条件 $u_2\big|_{r=b} = 0$ 得 $C_l = -B_l b^{2l+1}$，即 $u_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(r^l - \dfrac{b^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)B_l P_l(\cos\theta)$。

由连接条件得 $A_l a^l = \left(a^l - \dfrac{b^{2l+1}}{a^{l+1}}\right)B_l$，$\left[la^{l-1} + \dfrac{(l+1)b^{2l+1}}{a^{l+2}}\right]B_l - lA_l a^{l-1} = -\dfrac{Q(2l+1)}{4\pi\varepsilon_0 a^2}P_l(0)$。

解得 $A_l = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a^{l+1}} - \dfrac{a^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(0)$，$\quad B_l = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{a^l}{b^{2l+1}}P_l(0)$。

所以 $u_1(r,\theta) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^l - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{l+1}\left(\dfrac{r}{b}\right)^l\right]P_l(0)P_l(\cos\theta)$

$$= \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2k} - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2k+1}\left(\dfrac{r}{b}\right)^{2k}\right]P_{2k}(\cos\theta)。$$

$u_2(r,\theta) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\left(\dfrac{a}{r}\right)^l - \left(\dfrac{a}{b}\right)^l\left(\dfrac{r}{b}\right)^{l+1}\right]P_l(0)P_l(\cos\theta)$

$$= \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\left[\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2k} - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2k}\left(\dfrac{r}{b}\right)^{2k+1}\right]P_{2k}(\cos\theta)。$$

300. 将下列函数按球谐函数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ 展开：（1）$\sin^2\theta\cos^2\varphi$；（2）$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$。

（1）$\sin^2\theta\cos^2\varphi = \dfrac{1}{2}(1-x^2)(1+\cos 2\varphi) = \dfrac{1}{2}(1-x^2) + \dfrac{1}{4}(1-x^2)\left(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}\right)$

$$= \dfrac{1}{3}P_0^0(x) - \dfrac{1}{3}P_2^0(x) + \dfrac{1}{12}P_2^2(x)\left(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}\right)$$

$$= \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}Y_0^0(\theta,\varphi) - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{\pi}{5}}Y_2^0(\theta,\varphi) + \sqrt{\dfrac{2\pi}{15}}Y_2^2(\theta,\varphi) + \sqrt{\dfrac{2\pi}{15}}Y_2^{-2}(\theta,\varphi)。$$

（2）$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{2}(1+3x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$

$$= -\dfrac{1}{2}P_1^1(x)\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) - \dfrac{1}{2}P_2^1(x)\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$= -\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}Y_1^1(\theta,\varphi) - \sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}Y_1^{-1}(\theta,\varphi) - \sqrt{\dfrac{6\pi}{5}}Y_2^1(\theta,\varphi) - \sqrt{\dfrac{6\pi}{5}}Y_2^{-1}(\theta,\varphi)。$$

301. 在半径为 a 的（1）球内区域，（2）球外区域，求解：$\begin{cases}\nabla^2 u = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta,\varphi)\end{cases}$。

（1）$u(r,\theta,\varphi) = A_{0,0} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{l,m}r^l Y_l^m(\theta,\varphi)$，这里去掉了无界项 $\dfrac{1}{r^{l+1}}$。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}lA_{l,m}a^{l-1}Y_l^m(\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi),$$

求得 $A_{l,m}=\dfrac{1}{la^{l-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_l^{m*}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$ （$l=1,2,\cdots$）。

由于所给边界条件只是导数值，所以 $A_{0,0}$ 不定，即零电位点可任意选取。

（2） $u(r,\theta,\varphi)=A_{0,0}+\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\dfrac{B_{l,m}}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\varphi)$，这里去掉了有界项 r^l （$l=1,2,\cdots$）。

$$B_{l,m}=-\frac{a^{l+2}}{l+1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_l^{m*}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi。$$

302．一半径为 a 的均匀导体球，表面温度为（1） $u|_{r=a}=P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$，

（2） $u|_{r=a}=P_1(\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$，求出球内的稳定温度分布。

（1） $u=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^lP_l^m(\cos\theta)(A_{l,m}\cos m\varphi+B_{l,m}\sin m\varphi)$。

由边界条件可看出 $u(r,\theta,\varphi)=\dfrac{r}{a}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi=-\dfrac{r}{a}\sin\theta\cos\varphi$。

（2） $u|_{r=a}=-\dfrac{1}{3}P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi$，

可看出 $u(r,\theta,\varphi)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi=\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi$。

303．求解球内问题：$\begin{cases}\nabla^2u=A+Br^2\sin2\theta\cos\varphi\\ u|_{r=a}=0\end{cases}$。

令 $u(r,\theta,\varphi)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}P_l^m(\cos\theta)\left[R_{l,m}(r)\sin m\varphi+S_{l,m}(r)\cos m\varphi\right]$，代入方程得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{l,m}}{dr}\right)-l(l+1)R_{l,m}\right]P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dS_{l,m}}{dr}\right)-l(l+1)S_{l,m}\right]P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$= A + Br^2 \sin 2\theta \cos \varphi = AP_0^0 (\cos \theta) - \frac{2}{3} Br^2 P_2^1 (\cos \theta) \cos \varphi \text{。}$$

所以 $\dfrac{d}{dr} \left(r^2 \dfrac{dR_{l,m}}{dr} \right) - l(l+1) R_{l,m} = 0$，$\dfrac{d}{dr} \left(r^2 \dfrac{dS_{0,0}}{dr} \right) = Ar^2$，$\dfrac{d}{dr} \left(r^2 \dfrac{dS_{2,1}}{dr} \right) - 6S_{2,1} = -\dfrac{2}{3} Br^4$，

其他 $\dfrac{d}{dr} \left(r^2 \dfrac{dS_{l,m}}{dr} \right) - l(l+1) S_{l,m} = 0$。

由边界条件 $R_{l,m}(a) = 0$，$S_{l,m}(a) = 0$ 以及自然条件 $R_{l,m}(0)$，$S_{l,m}(0)$ 有界，解以上各常微分方程可得

$R_{l,m}(r) = 0$，$S_{0,0}(r) = \dfrac{A}{6} (r^2 - a^2)$，$S_{2,1}(r) = \dfrac{1}{21} Br^2 (a^2 - r^2)$，其他 $S_{l,m}(r) = 0$。

所以 $u(r, \theta, \varphi) = \dfrac{A}{6} (r^2 - a^2) + \dfrac{B}{21} r^2 (a^2 - r^2) P_2^1 (\cos \theta) \cos \varphi$

$$= \frac{A}{6} (r^2 - a^2) + \frac{B}{14} r^2 (r^2 - a^2) \sin 2\theta \cos \varphi \text{。}$$

附录：

关于 $P_l^m (x)$ 的定义，这里采用 $P_l^m (x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m P_l(x)}{dx^m}$，

原习题集答案采用 $P_l^m (x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m P_l(x)}{dx^m}$。

304. 计算 Wronski 行列式 $W(J_\nu, J_{-\nu})$ 及 $W(J_\nu, Y_\nu)$，其中 $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$。

由 Bessel 方程，$\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dJ_\nu(x)}{dx}\right] + x\left(1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu(x) = 0$，

$\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dJ_{-\nu}(x)}{dx}\right] + x\left(1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)J_{-\nu}(x) = 0$。

第一式两边乘 $J_{-\nu}(x)$ 减去第二式两边乘 $J_\nu(x)$ 得

$J_{-\nu}(x)\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dJ_\nu(x)}{dx}\right] - J_\nu(x)\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dJ_{-\nu}(x)}{dx}\right] = 0$。

继续化为 $J_{-\nu}(x)J_\nu'(x) - J_\nu(x)J_{-\nu}'(x) + x\left[J_{-\nu}(x)J_\nu''(x) - J_\nu(x)J_{-\nu}''(x)\right] = 0$，

即 $\dfrac{d}{dx}\left\{x\left[J_{-\nu}(x)J_\nu'(x) - J_\nu(x)J_{-\nu}'(x)\right]\right\} = 0$，

所以 $x\left[J_{-\nu}(x)J_\nu'(x) - J_\nu(x)J_{-\nu}'(x)\right] = C$（常数）。

由 $J_\nu(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$，$\quad J_{-\nu}(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$，

$J_\nu'(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(2k+\nu)(-1)^k}{2^{2k}\,k!\,\Gamma(\nu+k+1)}x^{2k-1}$，$\quad J_{-\nu}'(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(2k-\nu)(-1)^k}{2^{2k}\,k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}x^{2k-1}$，

可确定常数 C。

$C = \dfrac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\dfrac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} - \dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}\dfrac{-\nu}{\Gamma(-\nu+1)} = \dfrac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \dfrac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = \dfrac{2\sin\pi\nu}{\pi}$，

所以 $W(J_\nu, J_{-\nu}) = J_\nu(x)J_{-\nu}'(x) - J_{-\nu}(x)J_\nu'(x) = -\dfrac{C}{x} = -\dfrac{2\sin\pi\nu}{\pi x}$，

$W(J_\nu, Y_\nu) = \begin{vmatrix} J_\nu & Y_\nu \\ J_\nu' & Y_\nu' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_\nu & \cot\pi\nu\, J_\nu - \dfrac{1}{\sin\pi\nu}J_{-\nu} \\ J_\nu' & \cot\pi\nu\, J_\nu' - \dfrac{1}{\sin\pi\nu}J_{-\nu}' \end{vmatrix} = \cot\pi\nu\begin{vmatrix} J_\nu & J_\nu \\ J_\nu' & J_\nu' \end{vmatrix} - \dfrac{1}{\sin\pi\nu}\begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J_\nu' & J_{-\nu}' \end{vmatrix} = \dfrac{2}{\pi x}$。

305. 利用上题结果计算下列积分：（1）$\displaystyle\int \dfrac{dx}{xJ_\nu^2(x)}$；（2）$\displaystyle\int \dfrac{dx}{xY_\nu^2(x)}$；（3）$\displaystyle\int \dfrac{dx}{xJ_\nu(x)Y_\nu(x)}$；

（4）$\displaystyle\int \dfrac{dx}{x\left[J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)\right]}$。

（1）将 $J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J'_\nu(x) = -\dfrac{2\sin\pi\nu}{\pi x}$ 两边同乘 $-\dfrac{\pi}{2\sin\pi\nu}\dfrac{1}{J_\nu^2(x)}$ 得

$$\frac{1}{xJ_\nu^2(x)} = -\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\frac{J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J'_\nu(x)}{J_\nu^2(x)} = -\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\frac{d}{dx}\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)},$$

所以 $\displaystyle\int\frac{dx}{xJ_\nu^2(x)} = -\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\int d\,\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)} = -\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)} + C$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\cot\pi\nu - \frac{1}{\sin\pi\nu}\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)}\right] + C' = \frac{\pi}{2}\frac{\cos\pi\nu J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu J_\nu(x)} + C'$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)} + C' \text{。}$$

（2）由 $W(J_\nu, Y_\nu) = J_\nu(x)Y'_\nu(x) - J'_\nu(x)Y_\nu(x) = \dfrac{2}{\pi x}$ 可得 $\dfrac{1}{xY_\nu^2(x)} = -\dfrac{\pi}{2}\dfrac{d}{dx}\dfrac{J_\nu(x)}{Y_\nu(x)}$，

所以 $\displaystyle\int\frac{dx}{xY_\nu^2(x)} = -\frac{\pi}{2}\frac{J_\nu(x)}{Y_\nu(x)} + C$。

（3）将 $J_\nu Y'_\nu - J'_\nu Y_\nu = \dfrac{2}{\pi x}$ 两边同乘 $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{J_\nu Y_\nu}$ 得 $\dfrac{1}{xJ_\nu(x)Y_\nu(x)} = \dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{Y'_\nu(x)}{Y_\nu(x)} - \dfrac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)}\right]$，

所以 $\displaystyle\int\frac{dx}{xJ_\nu(x)Y_\nu(x)} = \frac{\pi}{2}\int\left[\frac{Y'_\nu(x)}{Y_\nu(x)} - \frac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)}\right]dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)} + C$。

（4）将 $J_\nu Y'_\nu - J'_\nu Y_\nu = \dfrac{2}{\pi x}$ 两边同乘 $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{J_\nu^2 + Y_\nu^2}$ 得

$$\frac{1}{x\left[J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)\right]} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1 + \left[Y_\nu(x)/J_\nu(x)\right]^2}\frac{d}{dx}\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)}, \quad \text{所以}$$

$$\int\frac{dx}{x\left[J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)\right]} = \frac{\pi}{2}\arctan\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)} + C \text{。}$$

306．有很多方程经过适当的自变量或因变量变换可化为 Bessel 方程而得到他的解。例如，

方程 $u'' + \dfrac{1-2\alpha}{z}u' + \left[\left(\beta\gamma z^{\gamma-1}\right)^2 + \dfrac{\alpha^2 - \gamma^2\nu^2}{z^2}\right]u = 0$ 的通解为 $c_1 z^\alpha J_\nu\left(\beta z^\gamma\right) + c_2 z^\alpha Y_\nu\left(\beta z^\gamma\right)$。

试验证此结果。

令 $x = \beta z^\gamma$，$u = z^\alpha y$，则

$$\frac{du}{dz} = \alpha z^{\alpha-1} y + z^{\alpha}\frac{dy}{dz} = \alpha z^{\alpha-1} y + \beta\gamma z^{\alpha+\gamma-1}\frac{dy}{dx} = \alpha z^{\alpha-1} y + \gamma x z^{\alpha-1}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2} y + \alpha z^{\alpha-1}\frac{dy}{dz} + \beta\gamma(\alpha+\gamma-1)z^{\alpha+\gamma-2}\frac{dy}{dx} + \beta\gamma z^{\alpha+\gamma-1}\frac{d}{dz}\frac{dy}{dx}$$

$$= \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2} y + \alpha\beta\gamma z^{\alpha+\gamma-2}\frac{dy}{dx} + \beta\gamma(\alpha+\gamma-1)z^{\alpha+\gamma-2}\frac{dy}{dx} + \beta^2\gamma^2 z^{\alpha+2\gamma-2}\frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$= \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2} y + \beta\gamma(2\alpha+\gamma-1)z^{\alpha+\gamma-2}\frac{dy}{dx} + \beta^2\gamma^2 z^{\alpha+2\gamma-2}\frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$= \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2} y + \gamma(2\alpha+\gamma-1)xz^{\alpha-2}\frac{dy}{dx} + \gamma^2 x^2 z^{\alpha-2}\frac{d^2 y}{dx^2} \text{。}$$

代入方程，化简得 $x^2\dfrac{d^2 y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - v^2\right)y = 0$，

这是 v 阶 Bessel 方程，通解为 $y = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x)$，

所以 $u = z^{\alpha} y = c_1 z^{\alpha} J_v(x) + c_2 z^{\alpha} Y_v(x) = c_1 z^{\alpha} J_v(\beta z^{\gamma}) + c_2 z^{\alpha} Y_v(\beta z^{\gamma})$。

307. 利用上题结果，解下列常微分方程：（1）$u'' + az^b u = 0$；（2）$z^2 u'' - 2zu' + 4(z^4 - 1)u = 0$；

（3）$zu'' - 3u' + zu = 0$；（4）$zu'' - u' + 4z^3 u = 0$；（5）$z^2 u'' + zu' - (z^2 + 1/4)u = 0$；

（6）$zu'' - u' - zu = 0$；（7）$u'' - z^2 u = 0$；（8）一单摆在其平衡位置附近作微小振动，若

摆长以等速率 b 增长，而初始时摆长为 a，则其动力学方程为 $(a + bt)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g\theta = 0$。

设 $t = 0$ 时单摆静止于 $\theta(0) = \theta_0$ 处，试求 $\theta(t)$。

（1）可看出，令上题中 $\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\beta = \dfrac{2\sqrt{a}}{b+2}$，$\gamma = \dfrac{b}{2} + 1$，$v = \dfrac{1}{b+2}$ 即可得该方程，因此

$$u = c_1 \sqrt{z}\, J_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2} z^{\frac{b}{2}+1}\right) + c_2 \sqrt{z}\, Y_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2} z^{\frac{b}{2}+1}\right)\text{。}$$

（2）$\alpha = \dfrac{3}{2}$，$\beta = 1$，$\gamma = 2$，$v = \dfrac{5}{4}$，$u = c_1 z^{3/2} J_{5/4}(z^2) + c_2 z^{3/2} Y_{5/4}(z^2)$。

（3）$\alpha = 2$，$\beta = 1$，$\gamma = 1$，$v = 2$，$u = c_1 z^2 J_2(z) + c_2 z^2 Y_2(z)$。

（4）$\alpha = 1$，$\beta = 1$，$\gamma = 2$，$v = 1/2$，$u = c_1 z J_{1/2}(z^2) + c_2 z Y_{1/2}(z^2)$。

（5）$\alpha=0$，$\beta=i$，$\gamma=1$，$\nu=1/2$，$u=c_1 J_{1/2}(iz)+c_2 Y_{1/2}(iz)=c_1' I_{1/2}(z)+c_2' K_{1/2}(z)$。

（6）$\alpha=1$，$\beta=i$，$\gamma=1$，$\nu=1$，$u=c_1 z I_1(z)+c_2 z K_1(z)$。

（7）$\alpha=1/2$，$\beta=i/2$，$\gamma=2$，$\nu=1/2$，$u=c_1\sqrt{z}\,I_{1/2}\left(\dfrac{1}{2}z^2\right)+c_2\sqrt{z}\,K_{1/2}\left(\dfrac{1}{2}z^2\right)$。

（8）令 $a+bt=x$，则方程化为 $x\dfrac{d^2\theta}{dx^2}+2\dfrac{d\theta}{dx}+\dfrac{g}{b^2}\theta=0$，令上题 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{2}{b}\sqrt{g}$，

$\gamma=1/2$，$\nu=1$ 即为该方程，所以

$$\theta=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1 J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{gx}\right)+c_2 Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{gx}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{a+bt}}\left[c_1 J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{g(a+bt)}\right)+c_2 Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{g(a+bt)}\right)\right]。$$

代入初始条件 $\theta(0)=\theta_0$，$\dot{\theta}(0)=0$ 可得

$$c_1=\frac{b\theta_0}{2\sqrt{g}}\frac{Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-\frac{2}{b}\sqrt{ga}Y_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)}{J_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)Y_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)}，\text{根据 304 题求出的 Wronski}$$

行列式可知 $J_1'\left(\dfrac{2}{b}\sqrt{ga}\right)Y_1\left(\dfrac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-J_1\left(\dfrac{2}{b}\sqrt{ga}\right)Y_1'\left(\dfrac{2}{b}\sqrt{ga}\right)=-\dfrac{b}{\pi\sqrt{ga}}$，所以

$$c_1=\frac{\pi\sqrt{a}}{2}\theta_0\left[-Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)+\frac{2}{b}\sqrt{ga}Y_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)\right]，\text{还可得}$$

$$c_2=\frac{\pi\sqrt{a}}{2}\theta_0\left[J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-\frac{2}{b}\sqrt{ga}J_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)\right]。$$

308. 证明：（1）$\cos x=J_0(x)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)$，$\sin x=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x)$。

（2）$J_0^2(x)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}J_n^2(x)=1$；（3）$x=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)J_{2n+1}(x)$；（4）$x^2=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n)^2 J_{2n}(x)$。

（1）令 $\exp\left[\dfrac{x}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\right]=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$ 中 $t=e^{i\theta}$，则有 $e^{ix\sin\theta}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$，　　　　　（a）

这是 $e^{ix\sin\theta}$ 的 Fourior 级数表示。比较两边实部和虚部有

$$\cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos n\theta = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\cos n\theta + \sum_{n=-1}^{-\infty} J_n(x)\cos n\theta$$

$$= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x)\cos n\theta = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left[1+(-1)^n\right]\cos n\theta$$

$$= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\theta \ 。 \qquad\qquad (b)$$

令 $\theta = \pi/2$ 既可得 $\cos x = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)$ 。

$$\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta + \sum_{n=-1}^{-\infty} J_n(x)\sin n\theta$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x)\sin n\theta = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left[1-(-1)^n\right]\sin n\theta$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\theta \ 。 \qquad\qquad (c)$$

令 $\theta = \pi/2$ 既可得 $\sin x = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x)$ 。

（2）由复 Fourior 级数的 Parseval 等式，对于（a）式有

$$J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{ix\sin\theta}\right|^2 d\theta = 1 \ 。$$

（3）将（a）式两边对 θ 求导得 $ix\cos\theta e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inJ_n(x)e^{in\theta}$ ， $\qquad (d)$

令 $\theta = 0$ 得 $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nJ_n(x) + \sum_{n=-1}^{-\infty} nJ_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nJ_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} nJ_{-n}(x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\left[1-(-1)^n\right]J_n(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)J_{2n+1}(x) \ 。$$

（4）将（d）式两边对 θ 求导得 $-x\sin\theta e^{ix\sin\theta} + ix^2\cos^2\theta e^{ix\sin\theta} = i\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 J_n(x)e^{in\theta}$ ，

令 $\theta = 0$ 得 $x^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 J_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[1+(-1)^n\right]J_n(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^2 J_{2n}(x)$ 。

309. 将函数 $\cos\left(x\sin\theta\right)$ 和 $\sin\left(x\sin\theta\right)$ 展为 Fourior 级数。（见上题（b）（c）式）

310. 将函数 $\cos\left(z\cos\varphi\right)$ 展开为 z 的幂级数，逐项积分，证明：

$$J_{\nu}\left(z\right)=\frac{\left(z/2\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_{0}^{\pi}\cos\left(z\cos\varphi\right)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\left(z/2\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_{-1}^{1}\cos\left(z\xi\right)\left(1-\xi^{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\xi。$$

其中 $\mathrm{Re}\,\nu>-\dfrac{1}{2}$。这个结果可以用来把"李萨如图形"展开成 Fourior 级数。作为一个例子，

试将 $y=\sqrt{\pi^{2}-x^{2}}$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上展成 Fourior 级数。

$$\cos\left(z\cos\varphi\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n\right)!}\left(z\cos\varphi\right)^{2n}，$$

$$\int_{0}^{\pi}\cos\left(z\cos\varphi\right)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n\right)!}z^{2n}\int_{0}^{\pi}\cos^{2n}\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n\right)!}z^{2n}\int_{0}^{\pi/2}2\cos^{2n}\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n\right)!}z^{2n}\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n\right)!}z^{2n}\frac{\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!\Gamma\left(n+\nu+1\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}{\left(z/2\right)^{\nu}}J_{\nu}\left(z\right)，$$

即 $J_{\nu}\left(z\right)=\dfrac{\left(z/2\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos\left(z\cos\varphi\right)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$，再令 $\cos\varphi=\xi$ 即可得

$$J_{\nu}\left(z\right)=\frac{\left(z/2\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_{-1}^{1}\cos\left(z\xi\right)\left(1-\xi^{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\xi。$$

$\sqrt{\pi^{2}-x^{2}}$ 是偶函数，可令 $\sqrt{\pi^{2}-x^{2}}=\dfrac{a_{0}}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}\cos nx$，则 $a_{n}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^{2}-x^{2}}\cos nxdx$，

作代换 $x=\pi\xi$，则 $a_{n}=\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^{2}}\cos\left(n\pi\xi\right)d\xi=\pi\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(3/2\right)J_{1}\left(n\pi\right)}{n\pi/2}=\dfrac{\pi J_{1}\left(n\pi\right)}{n}$，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{2}，\text{ 所以 }\sqrt{\pi^2 - x^2} = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi J_1(n\pi)}{n}\cos nx。$$

311. 证明：$\int x J_\nu^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\left[J_\nu^2(x) + J_{\nu+1}^2(x)\right] - \nu x J_\nu(x) J_{\nu+1}(x) + C$，其中 $\operatorname{Re}\nu \geq 0$，$C$ 为积分常数。如果把式中的 Bessel 函数换成其他的柱函数，公式还成立吗？

Bessel 方程 $\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left[x J_\nu'(x)\right] + \left(1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu(x) = 0$ 两边同乘 $x^2 J_\nu'(x)$ 得

$$x J_\nu'(x)\frac{d}{dx}\left[x J_\nu'(x)\right] + \left(x^2 - \nu^2\right)J_\nu(x)J_\nu'(x) = 0，\text{ 两边积分得}$$

$$\frac{1}{2}x^2 J_\nu'^2(x) + \int x^2 J_\nu(x)J_\nu'(x)\,dx - \frac{1}{2}\nu^2 J_\nu^2(x) + C = 0。 \tag{*}$$

其中 $\int x^2 J_\nu(x)J_\nu'(x)\,dx = x^2 J_\nu^2(x) - \int J_\nu(x)\dfrac{d}{dx}\left[x^2 J_\nu(x)\right]dx$

$$= x^2 J_\nu^2(x) - 2\int x J_\nu^2(x)\,dx - \int x^2 J_\nu(x)J_\nu'(x)\,dx，$$

所以 $\int x^2 J_\nu(x)J_\nu'(x)\,dx = \dfrac{1}{2}x^2 J_\nu^2(x) - \int x J_\nu^2(x)\,dx$，该式代入（*）式得

$$\int x J_\nu^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 J_\nu'^2(x) + \frac{1}{2}x^2 J_\nu^2(x) - \frac{1}{2}\nu^2 J_\nu^2(x) + C \tag{**}$$

将递推公式 $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$ 展开为 $-\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) + x^{-\nu}J_\nu'(x) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$，

两边同乘 $x^{\nu+1}$ 可得 $x J_\nu'(x) = \nu J_\nu(x) - x J_{\nu+1}(x)$，该式代入（**）式即得

$$\int x J_\nu^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\left[J_\nu^2(x) + J_{\nu+1}^2(x)\right] - \nu x J_\nu(x)J_{\nu+1}(x) + C。$$

上面计算只用到了 Bessel 方程和柱函数的递推公式，所以对其他柱函数也适用。

312. 设 μ_i 是 $J_n(x)$ 的正零点，试证：$\int_0^1 J_n(\mu_i x)J_n(\alpha x)x\,dx = -\dfrac{\mu_i J_n(\alpha)J_n'(\mu_i)}{\mu_i^2 - \alpha^2}$。然后，

令 $\alpha \to \mu_i$，由此计算出积分 $\int_0^1 J_n^2(\mu_i x)x\,dx$。

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(\mu_i x)}{dx}\right] + \left(\mu_i^2 x - \frac{n^2}{x}\right)J_n(\mu_i x) = 0，\quad \frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx}\right] + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right)J_n(\alpha x) = 0。$$

第一式两边乘 $J_n(\alpha x)$ 减去第二式两边乘 $J_n(\mu_i x)$，积分得

$$\left(\mu_i^2 - \alpha^2\right)\int_0^1 J_n(\mu_i x)J_n(\alpha x)x\,dx = \int_0^1\left\{J_n(\mu_i x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx}\right] - J_n(\alpha x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(\mu_i x)}{dx}\right]\right\}dx$$

$$= xJ_n(\mu_i x)\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx}\Bigg|_0^1 - xJ_n(\alpha x)\frac{dJ_n(\mu_i x)}{dx}\Bigg|_0^1$$

$$= \alpha xJ_n(\mu_i x)J_n'(\alpha x)\Big|_0^1 - \mu_i xJ_n(\alpha x)J_n'(\mu_i x)\Big|_0^1$$

$$= -\mu_i J_n(\alpha)J_n'(\mu_i)。$$

所以 $\displaystyle\int_0^1 J_n(\mu_i x)J_n(\alpha x)xdx = -\frac{\mu_i J_n(\alpha)J_n'(\mu_i)}{\mu_i^2-\alpha^2}$ （$\alpha \neq \mu_i$）。

$$\lim_{\alpha\to\mu_i}\frac{\mu_i J_n(\alpha)J_n'(\mu_i)}{\alpha^2-\mu_i^2} = \lim_{\alpha\to\mu_i}\frac{\mu_i J_n'(\alpha)J_n'(\mu_i)}{2\alpha} = \frac{1}{2}\left[J_n'(\mu_i)\right]^2,$$

即 $\displaystyle\int_0^1 J_n^2(\mu_i x)xdx = \frac{1}{2}J_n'^2(\mu_i)。$ （∗）

若令 $x = \dfrac{\rho}{a}$，则有 $\displaystyle\int_0^a J_n^2\left(\frac{\mu_i}{a}\rho\right)\rho d\rho = \frac{a^2}{2}J_n'^2(\mu_i)。$

313. 设 μ_i 是 $J_n'(x)$ 的正零点，重复上题步骤，计算积分 $\displaystyle\int_0^1 J_n^2(\mu_i x)xdx$。

$$\left(\mu_i^2-\alpha^2\right)\int_0^1 J_n(\mu_i x)J_n(\alpha x)xdx = \alpha xJ_n(\mu_i x)J_n'(\alpha x)\Big|_0^1 - \mu_i xJ_n(\alpha x)J_n'(\mu_i x)\Big|_0^1$$

$$= \alpha J_n(\mu_i)J_n'(\alpha),$$

$$\int_0^1 J_n(\mu_i x)J_n(\alpha x)xdx = \frac{\alpha J_n'(\alpha)J_n(\mu_i)}{\mu_i^2-\alpha^2},$$

$$\int_0^1 J_n^2(\mu_i x)xdx = \lim_{\alpha\to\mu_i}\frac{\alpha J_n'(\alpha)J_n(\mu_i)}{\mu_i^2-\alpha^2} = -\lim_{\alpha\to\mu_i}\frac{J_n'(\alpha)J_n(\mu_i)+\alpha J_n''(\alpha)J_n(\mu_i)}{2\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}J_n''(\mu_i)J_n(\mu_i),$$

取 Bessel 方程 $J_n''(x)+\dfrac{1}{x}J'(x)+\left(1-\dfrac{n^2}{x^2}\right)J_n(x)=0$ 中 $x=\mu_i$ 可得

$$J_n''(\mu_i) = -\left(1-\frac{n^2}{\mu_i^2}\right)J_n(\mu_i),\quad \text{所以} \int_0^1 J_n^2(\mu_i x)xdx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{n^2}{\mu_i^2}\right)J_n^2(\mu_i)。$$

若令 $x = \dfrac{\rho}{a}$，则有 $\displaystyle\int_0^a J_n^2\left(\frac{\mu_i}{a}\rho\right)\rho d\rho = \frac{a^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\mu_i^2}\right)J_n^2(\mu_i)。$

314. 若 $\operatorname{Re}\nu > -1$，证明：$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x J_\nu(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} J_{\nu+2n+1}(x)$。

由递推公式 $2J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)$ 可得

$$2\sum_{n=0}^{N} J_{\nu+2n+1}'(x) = 2J_{\nu+1}'(x) + 2J_{\nu+3}'(x) + \cdots + 2J_{\nu+2N+1}'(x)$$

$$= J_\nu(x) - J_{\nu+2}(x) + J_{\nu+2}(x) - J_{\nu+4}(x) - + \cdots + J_{\nu+2N}(x) - J_{\nu+2N+2}(x)$$

$$= J_\nu(x) - J_{\nu+2N+2}(x)。$$

写出 $J_{\nu+2N+2}(x)$ 的级数表达式 $J_{\nu+2N+2}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+2N+3+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu+2N+2}$，由

$\Gamma(z)$ 当 $z \to \infty$ 时的渐进公式可知 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} J_{\nu+2N+2}(x) = 0$，即 $\dfrac{1}{2}J_\nu(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} J_{\nu+2n+1}'(x)$。

两边积分，由于 $\operatorname{Re}\nu > -1$，故有 $J_{\nu+2n+1}(0) = 0$，所以 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x J_\nu(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} J_{\nu+2n+1}(x)$。

315. 计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_0^x t^{-n} J_{n+1}(t)\,dt$；（2）$\displaystyle\int_0^a x^3 J_0(x)\,dx$；（3）$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} J_0\left(\sqrt{bx}\right)dx$，

$a > 0$，$b \ge 0$；（4）$\displaystyle\int_0^t J_0\left(\sqrt{x(t-x)}\right)dx$。

（1）$\displaystyle\int_0^x t^{-n} J_{n+1}(t)\,dt = -\int_0^x \frac{d}{dt}\left[t^{-n} J_n(t)\right]dt = -x^{-n} J_n(x) + \left.\frac{J_n(t)}{t^n}\right|_{t=0}$。

由 $J_n(x)$ 当 $x \to 0$ 时的渐进公式 $J_n(x) \sim \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$ 可知 $\left.\dfrac{J_n(t)}{t^n}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{2^n n!}$，所以

$$\int_0^x t^{-n} J_{n+1}(t)\,dt = -x^{-n} J_n(x) + \frac{1}{2^n n!}。$$

（2）$\displaystyle\int_0^a x^3 J_0(x)\,dx = \int_0^a x^2 x J_0(x)\,dx = \int_0^a x^2 \frac{d}{dx}\left[x J_1(x)\right]dx = x^3 J_1(x)\Big|_0^a - 2\int_0^a x^2 J_1(x)\,dx$$

$$= a^3 J_1(a) - 2x^2 J_2(x)\Big|_0^a = a^3 J_1(a) - 2a^2 J_2(a)。$$

（3）$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} J_0\left(\sqrt{bx}\right)dx = \int_0^\infty e^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\sqrt{bx}}{2}\right)^{2n} dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{bx}{4}\right)^n e^{-ax}\,dx。$$

在 x 的任一有界区域 $0 \le x \le M$ 有 $\left| \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{bx}{4} \right)^n e^{-ax} \right| \le \dfrac{1}{(n!)^2} \left(\dfrac{bM}{4} \right)^n$，

级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \left(\dfrac{bM}{4} \right)^n$ 显然收敛，所以有限积分可与求和交换次序：

$$\int_0^M \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{bx}{4} \right)^n e^{-ax} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{b}{4} \right)^n \int_0^M x^n e^{-ax} dx , \qquad (*)$$

因为 $\left| \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{b}{4} \right)^n \int_0^M x^n e^{-ax} dx \right| \le \dfrac{1}{(n!)^2} \left(\dfrac{b}{4} \right)^n \int_0^M x^n e^{-ax} dx \le \dfrac{1}{(n!)^2} \left(\dfrac{b}{4} \right)^n \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx$，右边

积分是一个由 a 决定，与 M 无关的 Γ 函数值（有限），所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{b}{4} \right)^n \int_0^M x^n e^{-ax} dx$ 对

于 M 是一致收敛的。$(*)$ 式两边令 $M \to \infty$，则求极限与求和可交换顺序，即

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{bx}{4} \right)^n e^{-ax} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{b}{4} \right)^n \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx$$

$$= \dfrac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{b}{4a} \right)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \dfrac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \left(-\dfrac{b}{4a} \right)^n \Gamma(n+1)$$

$$= \dfrac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \left(-\dfrac{b}{4a} \right)^n = \dfrac{1}{a} e^{-\frac{b}{4a}} 。$$

下面关于求和与积分交换顺序合法性讨论省略。

（4）$\displaystyle\int_0^t J_0 \left(\sqrt{x(t-x)} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} \int_0^t x^n (t-x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} t^{2n+1} \int_0^1 u^n (1-u)^n du$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\dfrac{t}{2} \right)^{2n+1} \mathrm{B}(n+1, n+1) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\dfrac{t}{2} \right)^{2n+1} = 2 \sin \dfrac{t}{2} 。$$

316. 证明：$\displaystyle\int_0^t \left[\sqrt{x(t-x)} \right]^n J_n \left[\sqrt{x(t-x)} \right] dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^n} t^{n+\frac{1}{2}} J_{n+1/2} \left(\dfrac{t}{2} \right) 。$

$$\int_0^t \left[\sqrt{x(t-x)} \right]^n J_n \left[\sqrt{x(t-x)} \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1) 2^{2k+n}} \int_0^t x^{k+n} (t-x)^{k+n} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k t^{2k+2n+1}}{k! (n+k)! 2^{2k+n}} \mathrm{B}(k+n+1, k+n+1) = \sqrt{2} t^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (n+k)!}{k! (2k+2n+1)!} \left(\dfrac{t}{2} \right)^{2k+n+\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2} t^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(2k+2n+1)(2k+2n)(2k+2n-1)\cdots 3 \times 2 \times 1} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n+\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2} t^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k! 2^{2k+2n+1}(n+k)!\left(k+n+\frac{1}{2}\right)\left(k+n-\frac{1}{2}\right)\cdots \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} t^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k+1\right)} \left(\frac{t}{4}\right)^{2k+n+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} t^{n+\frac{1}{2}} J_{n+1/2}\left(\frac{t}{2}\right)。$$

317. 证明：$\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{c-1} x^{\frac{n}{2}} J_n\left(\alpha\sqrt{x}\right) dx = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^c \Gamma(c) J_{n+c}(\alpha)。$

$$\int_0^1 (1-x)^{c-1} x^{\frac{n}{2}} J_n\left(\alpha\sqrt{x}\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+n} \int_0^1 x^{k+n}(1-x)^{c-1} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+n} \mathrm{B}(k+n+1,c) = \Gamma(c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+c+k+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+n}$$

$$= \left(\frac{2}{\alpha}\right)^c \Gamma(c) J_{n+c}(\alpha)。$$

318. 设 $\nu > -1$，$a > 0$，$b > 0$，证明：

（1）$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{2a(2b)^\nu \Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}(a^2+b^2)^{\nu+3/2}}$；

（2）$\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$。

（1）$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2n+\nu} \int_0^\infty x^{2n+2\nu+1} e^{-ax} dx$

$$= \frac{1}{a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n}\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \Gamma(2n+2\nu+2)$$

$$= \frac{1}{a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1+2\nu)(2n+2\nu)(2n-1+2\nu)\cdots(2\nu)\Gamma(2\nu)}{n! 2^{2n}\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu)}{a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1+2\nu)(2n-1+2\nu)\cdots(1+2\nu)(2n+2\nu)(2n-2+2\nu)\cdots(2\nu)}{n!2^{2n}\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu)}{a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^{2n}\Gamma(n+\nu+1)} \frac{2^{n+1}\Gamma(n+\nu+3/2)}{\Gamma(\nu+1/2)} \frac{2^{n+1}\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2^2\Gamma(2\nu)}{a^{2\nu+2}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\nu+3/2)}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2(2b)^{\nu}}{\sqrt{\pi}a^{2\nu+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1+\nu+3/2)(n-2+\nu+3/2)\cdots(\nu+3/2)\Gamma(\nu+3/2)}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2(2b)^{\nu}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}a^{2\nu+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu-3/2)(-\nu-3/2-1)\cdots(-\nu-3/2-n+1)}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2(2b)^{\nu}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}a^{2\nu+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\nu-\frac{3}{2}}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} = \frac{2a(2b)^{\nu}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}a^{2\nu+3}}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\nu-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2a(2b)^{\nu}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\left(a^2+b^2\right)^{\nu+3/2}} \text{。}$$

（2）
$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2n+\nu} \int_0^{\infty} x^{2n+2\nu+1} e^{-a^2x^2}dx$$

$$\overset{a^2x^2=t}{=} \frac{1}{2a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^n \int_0^{\infty} t^{n+\nu} e^{-t}dt$$

$$= \frac{b^{\nu}}{2^{\nu+1}a^{2\nu+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^n = \frac{b^{\nu}}{\left(2a^2\right)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \text{。}$$

319. 证明：（1）$\int_0^{\infty} \frac{\sin p}{p} J_0(rp)dp = \begin{cases} \pi/2, 0 \le r \le 1 \\ \sin^{-1}\frac{1}{r}, r > 1 \end{cases}$；

（2）$\int_0^{\infty} \sin p J_0(rp)dp = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}, 0 < r < 1 \\ \infty, r = 1 \\ 0, r > 1 \end{cases}$ ；（3）$\int_0^{\infty} J_0(rp) J_1(ap)dp = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, r < a \\ \dfrac{1}{2a}, r = a \\ 0, r > a \end{cases}$ 。

（1） $\int_0^\infty \frac{\sin p}{p} J_0(rp)dp = \int_0^\infty \frac{\sin p}{p} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(rp\sin\theta)d\theta dp = \int_0^\pi d\theta \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p}{p} \cos(rp\sin\theta)dp$

$$= \int_0^\pi d\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\left(e^{irp\sin\theta} + e^{-irp\sin\theta}\right)dp = \int_0^\pi d\theta \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin p}{p} e^{irp\sin\theta}dp \text{。}$$

上面的无穷积分正是 $\frac{\sin p}{p}$ 的 Fourier 反演，易知 $\text{rect}(x) \xrightarrow{FT} \frac{2}{p}\sin\frac{p}{2}$，其中

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, |x| < \frac{1}{2} \\ 0, \text{others} \end{cases}, \text{ 所以上面积分} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \text{rect}\left(\frac{r}{2}\sin\theta\right)d\theta \text{。}$$

当 $0 < r < 1$ 时，$\left|\frac{r}{2}\sin\theta\right| < \frac{1}{2}$，$\text{rect}\left(\frac{r}{2}\sin\theta\right) = 1$，所以原积分 $= \frac{\pi}{2}$，

当 $r > 1$ 时，$0 < \theta < \sin^{-1}\frac{1}{r}, \pi - \sin^{-1}\frac{1}{r} < \theta < \pi$ 时，$\text{rect}\left(\frac{r}{2}\sin\theta\right) = 1$，其余 $\text{rect}\left(\frac{r}{2}\sin\theta\right) = 0$，

所以原积分 $= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\sin^{-1}\frac{1}{r}} d\theta + \int_{\pi-\sin^{-1}\frac{1}{r}}^\pi d\theta\right) = \sin^{-1}\frac{1}{r}$ 。

关于上面交换积分次序的合法性讨论书上有。

（2）书上已求出 $\int_0^\infty J_0(rt)e^{-pt}dt = \frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}}$ （$\text{Re } p > 0$），右边函数以 $\pm ir$ 为枝点，以连

接两枝点的虚轴线段为割线，规定割线右岸 $\arg(p-ir) = -\frac{\pi}{2}, \arg(p+ir) = \frac{\pi}{2}$，则令

$$p \to i \text{ 得} \int_0^\infty J_0(rt)e^{-it}dt = \begin{cases} -i\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}, 0 < r < 1 \\ \infty, r = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{r^2-1}}, r > 1 \end{cases}, \text{ 取虚部即可。}$$

（3） $\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty J_1(ap)dp\int_0^\pi \cos(rp\sin\theta)d\theta$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\int_0^\infty J_1(ap)\cos(rp\sin\theta)dp = -\frac{1}{a\pi}\int_0^\pi d\theta\int_0^\infty \cos(rp\sin\theta)dJ_0(ap) \text{。}$$

其中 $\int_0^\infty \cos(rp\sin\theta)dJ_0(ap) = J_0(ap)\cos(rp\sin\theta)\Big|_{p=0}^{p\to\infty} + r\sin\theta\int_0^\infty \sin(rp\sin\theta)J_0(ap)dp$

$$= -1 + \int_0^\infty \sin x J_0\left(\frac{a}{r\sin\theta}x\right)dx \text{,}$$

所以 $\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp = \frac{1}{a\pi}\int_0^\pi \left[1-\int_0^\infty \sin x J_0\left(\frac{a}{r\sin\theta}x\right)\right]d\theta$。

由上小题结论，当 $r<a$ 时，$\frac{a}{r\sin\theta}>1$，$\int_0^\infty \sin x J_0\left(\frac{a}{r\sin\theta}x\right)dx=0$，

所以 $\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp = \frac{1}{a\pi}\int_0^\pi d\theta = \frac{1}{a}$。

当 $r>a$ 时，$\int_0^\infty \sin x J_0\left(\frac{a}{r\sin\theta}x\right)dx = \begin{cases} \dfrac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}, \sin\theta>\dfrac{a}{r} \\ \infty, \sin\theta=\dfrac{a}{r} \\ 0, \sin\theta<\dfrac{a}{r} \end{cases}$，记 $\theta_0 = \sin^{-1}\dfrac{a}{r}$，

则 $\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp = \frac{1}{a\pi}\left[\int_0^{\theta_0}d\theta + \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\left(1-\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}\right)d\theta + \int_{\pi-\theta_0}^{\pi}d\theta\right]$

$= \frac{2}{a\pi}\left[\theta_0 + \int_{\theta_0}^{\pi/2}\left(1-\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}\right)d\theta\right] = \frac{2}{a\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}d\theta\right)$。

其中 $-\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2-r^2\cos^2\theta}}d\cos\theta$

$\overset{x=\cos\theta}{=} \int_{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}^{0}\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2-r^2x^2}}dx \overset{\frac{x}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}=y}{=} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \sin^{-1}y\Big|_1^0 = -\frac{\pi}{2}$，

所以 $\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp = 0$。

当 $r=a$ 时，$\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp = -\frac{1}{a}\int_0^\infty J_0(ap)dJ_0(ap) = \frac{1}{2a}J_0^2(ap)\Big|_{p\to\infty}^{p=0} = \frac{1}{2a}$。

320. 根据 Neumann 函数 $Y_\nu(z)$ 的定义 $Y_\nu(z) = \dfrac{\cos\nu\pi J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$，证明：

（1）$Y_{-\nu}(z) = \sin\nu\pi J_\nu(z) + \cos\nu\pi Y_\nu(z)$，$Y_\nu(ze^{im\pi}) = e^{-im\nu\pi}Y_\nu(z) + 2i\sin m\nu\pi \cot\nu\pi J_\nu(z)$，

$Y_{-\nu}(ze^{im\pi}) = e^{-im\nu\pi}Y_{-\nu}(z) + 2i\sin m\nu\pi \csc\nu\pi J_\nu(z)$；

（2）$Y_\nu(z)$ 的递推关系与 $J_\nu(z)$ 相同，即 $\dfrac{d}{dz}\left[z^\nu Y_\nu(z)\right] = z^\nu Y_{\nu-1}(z)$，

$$\frac{d}{dz}\Big[z^{-\nu}Y_\nu(z)\Big]=-z^{-\nu}Y_{\nu+1}(z)。$$

（1）$\cos\nu\pi Y_\nu(z)=\dfrac{\cos^2\nu\pi J_\nu(z)-\cos\nu\pi J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}=\dfrac{J_\nu(z)-\sin^2\nu\pi J_\nu(z)-\cos\nu\pi J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$

$$=-\frac{\cos\nu\pi J_{-\nu}(z)-J_\nu(z)}{\sin\nu\pi}-\sin\nu\pi J_\nu(z)=Y_{-\nu}(z)-\sin\nu\pi J_\nu(z)。$$

由 $J_\nu(z)$ 级数表达式有 $J_\nu\left(ze^{im\pi}\right)=e^{im\nu\pi}J_\nu(z)$，所以

$Y_\nu\left(ze^{im\pi}\right)=\cot\nu\pi e^{im\nu\pi}J_\nu(z)-\csc\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z)$，又有

$e^{-im\nu\pi}Y_\nu(z)=\cot\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_\nu(z)-\csc\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z)$，两式相减得

$Y_\nu\left(ze^{im\pi}\right)-e^{-im\nu\pi}Y_\nu(z)=\cot\nu\pi\left(e^{im\nu\pi}-e^{-im\nu\pi}\right)J_\nu(z)=2i\sin m\nu\pi\cot\nu\pi J_\nu(z)。$

$Y_{-\nu}\left(ze^{im\pi}\right)=-\cot\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z)+\csc\nu\pi e^{im\nu\pi}J_\nu(z)$，

$e^{-im\nu\pi}Y_{-\nu}(z)=-\cot\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z)+\csc\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_\nu(z)$，两式相减得

$Y_{-\nu}\left(ze^{im\pi}\right)-e^{-im\nu\pi}Y_{-\nu}(z)=2i\sin m\nu\pi\csc\nu\pi J_\nu(z)。$

（2）$\dfrac{d}{dz}\Big[z^\nu Y_\nu(z)\Big]=\cot\nu\pi\dfrac{d}{dz}\Big[z^\nu J_\nu(z)\Big]-\csc\nu\pi\dfrac{d}{dz}\Big[z^\nu J_{-\nu}(z)\Big]$

$$=\cot\nu\pi z^\nu J_{\nu-1}(z)+\csc\nu\pi z^\nu J_{-\nu+1}(z)$$

$$=z^\nu\Big[\cot(\nu-1)\pi J_{\nu-1}(z)-\csc(\nu-1)\pi J_{-\nu+1}(z)\Big]=z^\nu Y_{\nu-1}(z)。$$

$\dfrac{d}{dz}\Big[z^{-\nu}Y_\nu(z)\Big]=\cot\nu\pi\dfrac{d}{dz}\Big[z^{-\nu}J_\nu(z)\Big]-\csc\nu\pi\dfrac{d}{dz}\Big[z^{-\nu}J_{-\nu}(z)\Big]$

$$=-\cot\nu\pi z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)-\csc\nu\pi z^{-\nu}J_{-\nu+1}(z)$$

$$=-z^{-\nu}\Big[\cot(\nu+1)\pi J_{\nu+1}(z)-\csc(\nu+1)\pi J_{-\nu+1}(z)\Big]=-z^{-\nu}Y_{\nu+1}(z)。$$

321．设有一柱体半径为 a，高为 h。与外界绝热，初始温度为 $u_0\left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}\right)$，求此柱体内温度分布与变化。又当时间足够长时该柱体温度应达到稳定，试求此稳定温度。

初始温度分布与 φ, z 无关，所以该问题与 φ, z 无关，
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0 \\[3mm] u\big|_{\rho=0} \text{ 有界}, \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = 0 \\[3mm] u\big|_{t=0} = u_0\left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}\right) \end{cases} \quad 。$$

分离变量得本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)+\lambda^2\mathrm{P}=0 \\[3mm] \mathrm{P}(0)\text{有界}, \ \mathrm{P}'(a)=0 \end{cases}$ 及 $T'+\lambda^2\kappa T = 0$ 。

解本征值问题得 $\lambda_0 = 0$ ，$\lambda_i = \dfrac{\mu_i'}{a}$ （μ_i' 是 $J_0'(x)$，即 $J_1(x)$ 的第 i 个正零点，$i=1,2,\cdots$），

$\mathrm{P}_0(\rho) = A_0$ ，$\mathrm{P}_i(\rho) = J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)$ ，以及 $T(t) = A_i\exp\left[-\kappa\left(\dfrac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$ 。

所以 $u(\rho,t) = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\exp\left[-\kappa\left(\dfrac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$ ，

$u\big|_{t=0} = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right) = u_0\left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}\right)$ ，由 313 题求出的归一化因子可定出

$A_0 = \dfrac{2u_0}{a^2}\displaystyle\int_0^a \left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}\right)\rho\, d\rho = \dfrac{u_0}{2}$ ，

$$A_i = \dfrac{2u_0}{a^2 J_0^2(\mu_i')}\int_0^a\left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}\right)\rho J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)d\rho = \dfrac{2u_0}{a^2 J_0^2(\mu_i')}\left[\int_0^a \rho J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)d\rho - \dfrac{1}{a^2}\int_0^a \rho^3 J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)d\rho\right]$$

$$= \dfrac{2u_0}{a\mu_i' J_0^2(\mu_i')}\int_0^a \dfrac{d}{d\rho}\left[\rho J_1\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\right]d\rho - \dfrac{2u_0}{a^3 \mu_i' J_0^2(\mu_i')}\int_0^a \rho^2 \dfrac{d}{d\rho}\left[\rho J_1\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\right]d\rho$$

$$= \dfrac{2u_0}{a\mu_i' J_0^2(\mu_i')}\rho J_1\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\Big|_0^a - \dfrac{2u_0}{a^3 \mu_i' J_0^2(\mu_i')}\left\{\rho^3 J_1\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\Big|_0^a - 2\int_0^a \rho^2 J_1\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)d\rho\right\}$$

$$= \dfrac{4u_0}{a^2 \mu'^2 J_0^2(\mu_i')}\int_0^a \dfrac{d}{d\rho}\left[\rho^2 J_2\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\right]d\rho = \dfrac{4u_0 J_2(\mu_i')}{\mu'^2 J_0^2(\mu_i')}$$ ，

递推公式 $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x)$ 中令 $\nu=1, x=\mu_i'$ 可得 $J_2(\mu_i') = -J_0(\mu_i')$，所以

$A_i = -\dfrac{4u_0}{\mu'^2 J_0(\mu_i')}$ ，即 $u(\rho,t) = \dfrac{u_0}{2} - 4u_0\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mu'^2 J_0(\mu_i')}J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\exp\left[-\kappa\left(\dfrac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$ ，

$t \to \infty$ 时 $u \to \dfrac{u_0}{2}$。

322．半径为 R 的圆形膜，边缘固定，初始形状是旋转抛物面 $u\big|_{t=0} = H\left(1 - \dfrac{\rho^2}{R^2}\right)$，初速恒

为 0，求解膜的自由横振动：
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0 \\[2mm]
u\big|_{\rho=0} \text{ 有界}, u\big|_{\rho=R} = 0 \\[2mm]
u\big|_{t=0} = H\left(1 - \dfrac{\rho^2}{R^2}\right), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$

$u(\rho,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)\left[A_n \sin\dfrac{a\mu_n}{R}t + B_n \cos\dfrac{a\mu_n}{R}t\right]$（$\mu_n$ 是 $J_0(x)$ 的正零点），由初始条

件得 $A_n = 0$，$B_n = \dfrac{2H}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\displaystyle\int_0^R\left(1 - \dfrac{\rho^2}{R^2}\right)J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)\rho\, d\rho = \dfrac{4H J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}$，由递推关系可

得

$J_2(\mu_n) = \dfrac{2}{\mu_n}J_1(\mu_n)$，所以 $B_n = \dfrac{8H}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}$，

即 $u(\rho,t) = 8H\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)\cos\dfrac{a\mu_n}{R}t$。

323．求解下列定解问题：
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] = 0 \\[2mm]
u\big|_{\rho=0} \text{ 有界}, u\big|_{\rho=a} = 0, u\big|_{t=0} = u_0 \sin 2\varphi
\end{cases}
$$

$u(\rho,\varphi,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_m\left(\dfrac{\mu_n^{(m)}}{a}\rho\right)(A_{mn}\sin m\varphi + B_{mn}\cos m\varphi)\exp\left[-\left(\dfrac{\mu_n^{(m)}}{a}\right)^2\kappa t\right]$（$\mu_n^{(m)}$ 是

$J_m(x)$ 的正零点）。由于 $u\big|_{t=0} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_m\left(\dfrac{\mu_n^{(m)}}{a}\rho\right)(A_{mn}\sin m\varphi + B_{mn}\cos m\varphi) = u_0 \sin 2\varphi$，

所以 $B_{mn} = 0$，

$A_{2n} = \dfrac{2u_0}{a^2 J_2'^2(\mu_n^{(2)})}\displaystyle\int_0^a J_2\left(\dfrac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right)\rho\, d\rho = \dfrac{2u_0}{a^2 J_2'^2(\mu_n^{(2)})}\displaystyle\int_0^a \rho^2 \rho^{-1} J_2\left(\dfrac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right)d\rho$

$$= -\frac{2u_0}{a\mu_n^{(2)} J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)} \int_0^a \rho^2 \frac{d}{d\rho}\left[\rho^{-1} J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right)\right] d\rho$$

$$= -\frac{2u_0}{\mu_n^{(2)} J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)} J_1\left(\mu_n^{(2)}\right) + \frac{4u_0}{a\mu_n^{(2)} J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)} \int_0^a J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right) d\rho$$

$$= -\frac{2u_0}{\mu_n^{(2)} J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)} J_1\left(\mu_n^{(2)}\right) + \frac{4u_0}{\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}\left[1 - J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)\right]$$

$$= \frac{2u_0}{\mu_n^{(2)} J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}\left[\frac{2}{\mu_n^{(2)}} - J_1\left(\mu_n^{(2)}\right) - \frac{2}{\mu_n^{(2)}} J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)\right]\text{。}$$

递推公式 $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$ 中令 $\nu = 1$，$x = \mu_n^{(2)}$ 可得 $J_1\left(\mu_n^{(2)}\right) = \frac{\mu_n^{(2)}}{2} J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)$，

$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ 展开成 $\nu J_\nu(x) + x J_\nu'(x) = x J_{\nu-1}(x)$，令 $\nu = 2$，$x = \mu_n^{(2)}$ 可得

$J_2'\left(\mu_n^{(2)}\right) = J_1\left(\mu_n^{(2)}\right) = \frac{\mu_n^{(2)}}{2} J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)$，所以

$$A_{2n} = \frac{2u_0}{\mu_n^{(2)}\left[\frac{\mu_n^{(2)}}{2} J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)\right]^2}\left[\frac{2}{\mu_n^{(2)}} - \frac{\mu_n^{(2)}}{2} J_0\left(\mu_n^{(2)}\right) - \frac{2}{\mu_n^{(2)}} J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)\right]$$

$$= 4u_0 \frac{4 - \left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + 4\right] J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)}{\left(\mu_n^{(2)}\right)^4 J_0^2\left(\mu_n^{(2)}\right)},$$

其余 $A_{mn} = 0$。

即 $u(\rho, \varphi, t) = 4u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - \left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + 4\right] J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)}{\left(\mu_n^{(2)}\right)^4 J_0^2\left(\mu_n^{(2)}\right)} J_2\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right) \sin 2\varphi \exp\left[-\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{a}\right)^2 \kappa t\right]$。

324．一长为 π，半径为 1 的圆柱形导体，柱体侧面和其上下底的温度均保持为 0，初始时柱体内温度分布为 $f(\rho)\sin nz$，求柱体内温度变化与分布。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = 0 \\ u|_{\rho=0} \text{ 有界}, u|_{\rho=a} = 0, u|_{z=0} = 0, u|_{z=\pi} = 0, u|_{t=0} = f(\rho)\sin nz \end{cases}$$

分离变量得本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)+k^2\mathrm{P}=0 \\ \mathrm{P}(0)\text{有界}, \ \mathrm{P}(a)=0 \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{d^2Z}{dz^2}+m^2Z=0 \\ Z(0)=0, \ Z(\pi)=0 \end{cases}$ 以及

$\dfrac{dT}{dt}+\left(k^2+m^2\right)\kappa T=0$。

$u\left(\rho,z,t\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{im}J_0\left(\mu_i\rho\right)\sin mz\exp\left[-\left(\mu_i^2+m^2\right)\kappa t\right]$（$\mu_i$ 是 $J_0(x)$ 的正零点）。

由初始条件可得 $A_{in}=\dfrac{2}{J_1^2\left(\mu_i\right)}\displaystyle\int_0^1 f\left(\rho\right)J_0\left(\mu_i\rho\right)\rho d\rho$，其余 $A_{im}=0$，即

$u\left(\rho,z,t\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}A_{in}J_0\left(\mu_i\rho\right)\sin nz\exp\left[-\left(\mu_i^2+n^2\right)\kappa t\right]$。

325．一空心圆柱，内半径为 a，外半径为 b，维持内外柱面温度为 0，又设柱体高为 h，

上下底绝热，初温为常数 u_0，求柱体内温度变化与分布：$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0 \\ u\big|_{\rho=a}=0, u\big|_{\rho=b}=0, u\big|_{t=0}=u_0 \end{cases}$。

分离变量得本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)+k^2\mathrm{P}=0 \\ \mathrm{P}(a)=0, \mathrm{P}(b)=0 \end{cases}$ 以及 $\dfrac{dT}{dt}+k^2\kappa T=0$。

$\mathrm{P}(\rho)$ 的通解为 $\mathrm{P}(\rho)=AJ_0\left(k\rho\right)+BY_0\left(k\rho\right)$，由边界条件得 $\begin{vmatrix} J_0\left(ka\right) & Y_0\left(ka\right) \\ J_0\left(kb\right) & Y_0\left(kb\right) \end{vmatrix}=0$，

用 k_i 表示方程 $J_0\left(k_ia\right)Y_0\left(k_ib\right)-J_0\left(k_ib\right)Y_0\left(k_ia\right)=0$（所以 $Y_0\left(k_ia\right)=\dfrac{J_0\left(k_ia\right)}{J_0\left(k_ib\right)}Y_0\left(k_ib\right)$，

$Y_0\left(k_ib\right)=\dfrac{J_0\left(k_ib\right)}{J_0\left(k_ia\right)}Y_0\left(k_ia\right)$）的正根，即为本征值，本征函数为

$\mathrm{P}_i\left(\rho\right)=Y_0\left(k_ia\right)J_0\left(k_i\rho\right)-J_0\left(k_ia\right)Y_0\left(k_i\rho\right)$，可算出：

$\displaystyle\int_a^b \mathrm{P}_i\left(\rho\right)\rho d\rho=Y_0\left(k_ia\right)\int_a^b\rho J_0\left(k_i\rho\right)d\rho-J_0\left(k_ia\right)\int_a^b\rho Y_0\left(k_i\rho\right)d\rho$

$=\dfrac{Y_0\left(k_ia\right)}{k_i}\rho J_1\left(k_i\rho\right)\Big|_{\rho=a}^{\rho=b}-\dfrac{J_0\left(k_ia\right)}{k_i}\rho Y_1\left(k_i\rho\right)\Big|_{\rho=a}^{\rho=b}$

$$= \frac{b}{k_i} \begin{vmatrix} J_0(k_i a) & J_0'(k_i b) \\ Y_0(k_i a) & Y_0'(k_i b) \end{vmatrix} - \frac{a}{k_i} \begin{vmatrix} J_0(k_i a) & J_0'(k_i a) \\ Y_0(k_i a) & Y_0'(k_i a) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b}{k_i} \frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)} \begin{vmatrix} J_0(k_i b) & J_0'(k_i b) \\ Y_0(k_i b) & Y_0'(k_i b) \end{vmatrix} - \frac{a}{k_i} \begin{vmatrix} J_0(k_i a) & J_0'(k_i a) \\ Y_0(k_i a) & Y_0'(k_i a) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b}{k_i} \frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)} \frac{2}{\pi k_i b} - \frac{a}{k_i} \frac{2}{\pi k_i a} = \frac{2}{\pi k_i^2} \left[\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)} - 1 \right],$$

下面求 $\int_a^b \mathrm{P}_i^2(\rho)\rho d\rho$：

令 $\mathrm{P}(\rho) = Y_0(ka)J_0(k\rho) - J_0(ka)Y_0(k\rho)$（显然 $\mathrm{P}(a) = 0$），则

$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right) + k^2\mathrm{P} = 0$，又有 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}_i}{d\rho}\right) + k_i^2\mathrm{P}_i = 0$，第一式两边乘 $\rho\mathrm{P}_i(\rho)$ 减去第

二式两边乘 $\rho\mathrm{P}(\rho)$，两边积分得

$$\int_a^b \mathrm{P}\mathrm{P}_i\rho d\rho = \frac{\int_a^b \left[\mathrm{P}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}_i}{d\rho}\right) - \mathrm{P}_i\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right) \right]d\rho}{k^2 - k_i^2} = \frac{\left(\rho\mathrm{P}\mathrm{P}_i'\right)_a^b - \left(\rho\mathrm{P}_i\mathrm{P}'\right)_a^b}{k^2 - k_i^2}$$

$$= \frac{b\mathrm{P}(b)\mathrm{P}_i'(b)}{k^2 - k_i^2} = \frac{bk_i\mathrm{P}(b)}{k^2 - k_i^2}\left[Y_0(k_i a)J_0'(k_i b) - J_0(k_i a)Y_0'(k_i b) \right]$$

$$= -\frac{bk_i\mathrm{P}(b)}{k^2 - k_i^2}\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\begin{vmatrix} J_0(k_i b) & J_0'(k_i b) \\ Y_0(k_i b) & Y_0'(k_i b) \end{vmatrix} = -\frac{bk_i\mathrm{P}(b)}{k^2 - k_i^2}\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\frac{2}{\pi k_i b}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\frac{Y_0(ka)J_0(kb) - J_0(ka)Y_0(kb)}{k^2 - k_i^2} \, 。$$

所以 $\displaystyle\int_a^b \mathrm{P}_i^2(\rho)\rho d\rho = \lim_{k\to k_i}\int_a^b \mathrm{P}\mathrm{P}_i\rho d\rho = -\lim_{k\to k_i}\frac{2}{\pi}\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\frac{Y_0(ka)J_0(kb) - J_0(ka)Y_0(kb)}{k^2 - k_i^2}$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\lim_{k\to k_i}\frac{a\begin{vmatrix} J_0(kb) & J_0'(ka) \\ Y_0(kb) & Y_0'(ka) \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} J_0(ka) & J_0'(kb) \\ Y_0(ka) & Y_0'(kb) \end{vmatrix}}{2k}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\frac{a\dfrac{J_0(k_i b)}{J_0(k_i a)}\begin{vmatrix} J_0(k_i a) & J_0'(k_i a) \\ Y_0(k_i a) & Y_0'(k_i a) \end{vmatrix} - b\dfrac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\begin{vmatrix} J_0(k_i b) & J_0'(k_i b) \\ Y_0(k_i b) & Y_0'(k_i b) \end{vmatrix}}{2k_i}$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k_i^2} \left\{ \left[\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)} \right]^2 - 1 \right\} \text{。}$$

$$u(\rho,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \mathrm{P}_i(\rho) \exp\left(-k_i^2 \kappa t\right) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[Y_0(k_i a) J_0(k_i \rho) - J_0(k_i a) Y_0(k_i \rho) \right] \exp\left(-k_i^2 \kappa t\right) \text{。}$$

由初始条件，$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \mathrm{P}_i(\rho) = u_0$，所以

$$A_i = u_0 \frac{\int_a^b \mathrm{P}_i(\rho) \rho d\rho}{\int_a^b \mathrm{P}_i^2(\rho) \rho d\rho} = u_0 \frac{\dfrac{2}{\pi k_i^2} \left[\dfrac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)} - 1 \right]}{\dfrac{2}{\pi^2 k_i^2} \left\{ \left[\dfrac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)} \right]^2 - 1 \right\}} = \pi u_0 \frac{J_0(k_i b)}{J_0(k_i a) + J_0(k_i b)} \text{。}$$

即 $u(\rho,t) = \pi u_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(k_i b)}{J_0(k_i a) + J_0(k_i b)} \left[Y_0(k_i a) J_0(k_i \rho) - J_0(k_i a) Y_0(k_i \rho) \right] \exp\left(-k_i^2 \kappa t\right)$ 。

326. 半径为 R 的圆形膜，边缘固定，在单位质量上受周期力（1）$f(\rho,t) = A\sin\omega t$，（2）$f(\rho,t) = A\left(1 - \dfrac{\rho^2}{R^2}\right)\sin\omega t$ 的作用，求解膜的强迫振动，设初位移和初速度均为 0。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho} \right) = f(\rho,t) \\ u|_{\rho=0} = \text{有界}, \; u|_{\rho=R} = 0, \; u|_{t=0} = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

（1）将 $u(\rho,t)$ 和 $f(\rho,t)$ 按本征函数 $J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)$（$\mu_n$ 是 $J_0(x)$ 的正零点）展开：

$$u(\rho,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right), \quad f(\rho,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right),$$

$$f_n(t) = \frac{2A\sin\omega t}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right) \rho d\rho = \frac{2A}{\mu_n J_1(\mu_n)}\sin\omega t \text{。}$$

代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\mu_n J_1(\mu_n)}\sin\omega t \, J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right),$$

所以 $\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t) = \dfrac{2A}{\mu_n J_1(\mu_n)}\sin\omega t, \\ T_n(0)=0, T_n'(0)=0 \end{cases}$

若不存在 m 使得 $\omega = \dfrac{a\mu_m}{R}$，

可解得 $T_n(t) = \dfrac{2A}{\mu_n J_1(\mu_n)\left[\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2 - \omega^2\right]}\left(\sin\omega t - \dfrac{\omega R}{a\mu_n}\sin\dfrac{a\mu_n}{R}t\right)$。

若存在 m 使得 $\omega = \dfrac{a\mu_m}{R}$，当 $n \ne m$ 时，$T_n(t)$ 解仍如上式，而

$T_m(t) = \dfrac{A}{\omega\mu_m J_1(\mu_m)}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t\right)$。

第一种情况 $u(\rho,t) = 2A\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)\left[\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2 - \omega^2\right]}\left(\sin\omega t - \dfrac{\omega R}{a\mu_n}\sin\dfrac{a\mu_n}{R}t\right)$。

第二种情况 $u(\rho,t) = 2A\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\n\ne m}}^{\infty} \dfrac{J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)\left[\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2 - \omega^2\right]}\left(\sin\omega t - \dfrac{\omega R}{a\mu_n}\sin\dfrac{a\mu_n}{R}t\right)$

$\qquad\qquad + \dfrac{A}{\omega\mu_m J_1(\mu_m)}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t\right)J_0\left(\dfrac{\mu_m}{R}\rho\right)$。

（2）$u(\rho,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)$，$f(\rho,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)$，

$f_n(t) = \dfrac{2A\sin\omega t}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\displaystyle\int_0^R \left(1 - \dfrac{\rho^2}{R^2}\right) J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)\rho\, d\rho = \dfrac{8A}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\sin\omega t$。

代入方程得 $\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t) = \dfrac{8A}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\sin\omega t \\ T_n(0)=0, T_n'(0)=0 \end{cases}$

第一种情况，$T_n(t) = \dfrac{8A}{\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2 - \omega^2}\dfrac{1}{\mu_n^4 J_1(\mu_n)}\left(\mu_n\sin\omega t - \dfrac{\omega R}{a}\sin\dfrac{a\mu_n}{R}t\right)$，

$$u(\rho,t)=8A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{a\mu_{n}}{R}\right)^{2}-\omega^{2}}\frac{J_{0}\left(\dfrac{\mu_{n}}{R}\rho\right)}{\mu_{n}^{4}J_{1}(\mu_{n})}\left(\mu_{n}\sin\omega t-\frac{\omega R}{a}\sin\frac{a\mu_{n}}{R}t\right)_{\circ}$$

第二种情况，$T_{m}(t)=\dfrac{4A}{\omega^{2}\mu_{m}^{3}J_{1}(\mu_{m})}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$，

$$u(\rho,t)=8A\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{a\mu_{n}}{R}\right)^{2}-\omega^{2}}\frac{J_{0}\left(\dfrac{\mu_{n}}{R}\rho\right)}{\mu_{n}^{4}J_{1}(\mu_{n})}\left(\mu_{n}\sin\omega t-\frac{\omega R}{a}\sin\frac{a\mu_{n}}{R}t\right)$$

$$+\frac{4A}{\omega^{2}\mu_{m}^{3}J_{1}(\mu_{m})}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)J_{0}\left(\frac{\mu_{m}}{R}\rho\right)_{\circ}$$

327．求长圆柱形铀块的临界半径（见习题 11 第 205 题和习题 12 第 223 题）。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=D\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\alpha u\\[2mm] u|_{\rho=0}\text{ 有界},u|_{\rho=a}=0\end{cases}_{\circ}$$

分离变量可得 $u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{n}J_{0}\left(\dfrac{\mu_{n}}{a}\rho\right)\exp\left\{-\left[D\left(\dfrac{\mu_{n}}{a}\right)^{2}-\alpha\right]t\right\}$（$\mu_{n}$ 是 $J_{0}(x)$ 的正零

点）。可看出，只要 $a<\sqrt{\dfrac{D}{\alpha}}\mu_{1}$，上面级数第一项趋于无穷，$\sqrt{\dfrac{D}{\alpha}}\mu_{1}$ 即为临界厚度。

328．一完全柔软的均匀线，密度为 ρ，上端（$x=l$）固定在匀速转动的轴上，下端（$x=0$）

自由，此线相对于平衡位置作横振动，横振动方程及定解条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}-g\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\omega^{2}u=0\\[2mm] u|_{x=0}\text{ 有界},u|_{x=l}=0\\[2mm] u|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0}=\psi(x)\end{cases}，\quad\text{求 }u(x,t)_{\circ}$$

令 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 分离变量得 $\begin{cases}xX''+X'+k^{2}X=0\\ T''+(gk^{2}-\omega^{2})T=0\end{cases}_{\circ}$

令 306 题中 $\alpha = 0, \beta = 2k, \gamma = \dfrac{1}{2}, \nu = 0$ 可得 $X(x) = AJ_0\left(2k\sqrt{x}\right) + BY_0\left(2k\sqrt{x}\right)$，由边界

条件得到本征值 $k_n = \dfrac{\mu_n}{2\sqrt{l}}$（$\mu_n$ 是 $J_0(x)$ 的正零点），本征函数 $X_n(x) = J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)$。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right), \quad \text{其中 } \omega_n = \sqrt{\dfrac{g}{4l}\mu_n^2 - \omega^2}。$$

令 312 题（*）式 $n = 0$：$\displaystyle\int_0^1 J_0^2(\mu_i x)\,x\,dx = \dfrac{1}{2}J_1^2(\mu_i)$，作代换 $x = \sqrt{\dfrac{t}{l}}$，则有

$$\int_0^l J_0^2\left(\mu_i\sqrt{\dfrac{t}{l}}\right)dt = lJ_1^2(\mu_i)。\text{ 由初始条件可定出 } A_n = \dfrac{1}{lJ_1^2(\mu_n)}\int_0^l \varphi(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx,$$

$$B_n = \dfrac{1}{l\omega_n J_1^2(\mu_n)}\int_0^l \psi(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx。$$

329. 一完全柔软的均匀线，上端（$x = l$）固定，下端（$x = 0$）自由，线的密度 $\rho = ax^m$

（$m > -1$），则横振动方程及定解条件为 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{gx}{m+1}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\[2mm] u\big|_{x=0}\text{ 有界},\ u\big|_{x=l} = 0 \\[2mm] u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=0} = \psi(x) \end{cases}$，求 $u(x,t)$。

分离变量得 $\begin{cases} xX'' + (m+1)X' + k^2 X = 0 \\[2mm] T'' + \dfrac{g}{m+1}k^2 T = 0 \end{cases}$，令 306 题中 $\alpha = -\dfrac{m}{2}, \beta = 2k, \gamma = \dfrac{1}{2}, \nu = m$ 可得

本征值 $k_n = \dfrac{\mu_n}{2\sqrt{l}}$，本征函数 $X_n(x) = x^{-\frac{m}{2}}J_m\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)$（$\mu_n$ 是 $J_m(x)$ 的正零点）。

$$u(x,t) = x^{-\frac{m}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right)J_m\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right), \quad \text{其中 } \omega_n = \dfrac{\mu_n}{2}\sqrt{\dfrac{g}{l(1+m)}}。$$

由 312 题（*）式可得 $\displaystyle\int_0^1 J_m^2\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx = lJ_m'^2(\mu_n)$，

由递推关系 $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-m}J_m(x)\right] = -x^{-m}J_{m+1}(x)$ 可得 $J_m'(\mu_n) = -J_{m+1}(\mu_n)$，

所以 $\int_0^1 J_m^2\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx = lJ_{m+1}^2(\mu_n)$。

由初始条件可得 $A_n = \dfrac{1}{lJ_{m+1}^2(\mu_n)}\int_0^l x^{\frac{m}{2}}\varphi(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx$，

$B_n = \dfrac{1}{l\omega_n J_{m+1}^2(\mu_n)}\int_0^l x^{\frac{m}{2}}\psi(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx$。

330. 证明 （1） $H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z)$， $H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z)$；

（2） $H_{\nu}^{(1)}\left(ze^{im\pi}\right) = \dfrac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z) - e^{-i\nu\pi}\dfrac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z)$，

$H_{\nu}^{(2)}\left(ze^{im\pi}\right) = \dfrac{\sin(1+m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z) + e^{i\nu\pi}\dfrac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z)$。

（1）利用 320 题结论。

$H_{-\nu}^{(1)}(z) = J_{-\nu}(z) + iY_{-\nu}(z) = J_{-\nu}(z) + i\sin\nu\pi J_{\nu}(z) + i\cos\nu\pi Y_{\nu}(z)$，

$e^{i\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi}J_{\nu}(z) + ie^{i\nu\pi}Y_{\nu}(z)$

$\qquad = \cos\nu\pi J_{\nu}(z) + i\sin\nu\pi J_{\nu}(z) + i\cos\nu\pi Y_{\nu}(z) - \sin\nu\pi Y_{\nu}(z)$，

两式相减得 $H_{-\nu}^{(1)}(z) - e^{i\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{-\nu}(z) - \cos\nu\pi J_{\nu}(z) + \sin\nu\pi Y_{\nu}(z) = 0$。

同样可得 $H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z)$。

（2） $\dfrac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z) - e^{-i\nu\pi}\dfrac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z)$

$\qquad = (\cos m\nu\pi - \cot\nu\pi\sin m\nu\pi)\left[J_{\nu}(z) + iY_{\nu}(z)\right]$

$\qquad\qquad - (\cot\nu\pi\sin m\nu\pi - i\sin m\nu\pi)\left[J_{\nu}(z) - iY_{\nu}(z)\right]$

$\qquad = e^{im\nu\pi}J_{\nu}(z) + i\left[e^{-im\nu\pi}Y_{\nu}(z) + 2i\cot\nu\pi\sin m\nu\pi J_{\nu}(z)\right]$

$\qquad = J_{\nu}\left(ze^{im\pi}\right) + iY_{\nu}\left(ze^{im\pi}\right) = H_{\nu}^{(1)}\left(ze^{im\pi}\right)$。

同样可得 $H_{\nu}^{(2)}\left(ze^{im\pi}\right) = \dfrac{\sin(1+m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z) + e^{i\nu\pi}\dfrac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z)$。

331. 若 n 为一正整数，证明：$J_{n+1/2}(x) = i^{-n}\sqrt{\dfrac{x}{2\pi}}\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{i\mu x}P_n(\mu)d\mu$，并推出

$$i^n\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}J_{n+1/2}(x)x^{-\frac{1}{2}}dx = \begin{cases} 2\pi P_n(t), |t|<1 \\ 0, |t|>1 \end{cases}。$$

证：$\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{i\mu x}P_n(\mu)d\mu = \int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\mu x)^k}{k!}P_n(\mu)d\mu = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k x^k}{k!}\int_{-1}^{1}\mu^k P_n(\mu)d\mu$，

由习题 15 第 275 题结果，

$$\text{上式} = 2^{n+1}i^n x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}(n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} = 2^{n+1}i^n x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2n+2m+1}m!\Gamma\left(n+m+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{x}}i^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}i^n J_{n+1/2}(x)。$$

$$i^n\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}J_{n+1/2}(x)x^{-\frac{1}{2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}dx\int_{-1}^{1} e^{i\mu x}P_n(\mu)d\mu$$

$$= \int_{-1}^{1}P_n(\mu)d\mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu-t)x}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}P_n(\mu)\delta(\mu-t)d\mu，$$

当 $|t|<1$ 时，上式 $=2\pi P_n(t)$，当 $|t|>1$ 时上式 $=0$。

332. 一导体球，半径为 a，初温为常温 u_0，球面温度为 0，求球内温度变化和分布。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \\ u|_{r=0}\text{有界}, u|_{r=a}=0, u|_{t=0}=u_0 \end{cases}$$

分离变量得本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right) + k^2 R = 0 \\ R(0)\text{有界}, R(a)=0 \end{cases}$ 及 $T' + k^2\kappa T = 0$。

R 的方程是零阶球 Bessel 方程，通解为 $R(r) = Aj_0(kr) + Bn_0(kr)$，由边界条件可得本征

值 $k_n = \dfrac{\mu_n}{a}$（μ_n 是 $j_0(x)$ 的正零点，$n=1,2,\cdots$），本征函数 $R_n(r) = j_0\left(\dfrac{\mu_n}{a}r\right)$。

由于 $j_0(x) = \dfrac{\sin x}{x}$，所以 $\mu_n = n\pi$，$k_n = \dfrac{n\pi}{a}$，$R_n(r) = \dfrac{a}{n\pi r}\sin\dfrac{n\pi}{a}r$。

所以 $u(r,t) = \dfrac{a}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{a}r\exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 \kappa t\right]$,

由初始条件, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{a}r = \dfrac{\pi u_0}{a}r$, 所以 $A_n = \dfrac{2n\pi u_0}{a^2}\displaystyle\int_0^a r\sin\dfrac{n\pi}{a}r\,dr = 2u_0(-1)^{n+1}$,

即 $u(r,t) = \dfrac{2u_0 a}{\pi r}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{n\pi}{a}r\exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 \kappa t\right]$。

333．确定球形铀块的临界半径（见习题 11 第 205 题和习题 12 第 223 题）。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \alpha u \\ u\big|_{r=0} \text{ 有界}, u\big|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

分离变量可得 $u(r,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n j_0\left(\dfrac{n\pi}{a}r\right)\exp\left\{-\left[D\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 - \alpha\right]t\right\}$, 可得临界厚度为 $\pi\sqrt{\dfrac{D}{\alpha}}$。

334．定义: $K_\nu(z) = \dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right]$, 试证明:

$$K_\nu(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}ie^{i\nu\pi/2}H_\nu^{(1)}\left(ze^{i\pi/2}\right), & -\pi < \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2}ie^{-i\nu\pi/2}H_\nu^{(2)}\left(ze^{-i\pi/2}\right), & -\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi \end{cases}$$

$-\pi < \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$ 时, $-\dfrac{\pi}{2} < \arg ze^{i\pi/2} \le \pi$,

$e^{i\nu\pi/2}H_\nu^{(1)}\left(ze^{i\pi/2}\right) = e^{i\nu\pi/2}\left[J_\nu\left(ze^{i\pi/2}\right) + iY_\nu\left(ze^{i\pi/2}\right)\right]$

$\qquad = e^{i\nu\pi/2}\left[J_\nu\left(ze^{i\pi/2}\right) + i\cot\nu\pi J_\nu\left(ze^{i\pi/2}\right) - i\csc\nu\pi J_{-\nu}\left(ze^{i\pi/2}\right)\right]$

$\qquad = e^{i\nu\pi/2}\left[(1 + i\cot\nu\pi)e^{i\nu\pi/2}I_\nu(z) - i\csc\nu\pi e^{-i\nu\pi/2}I_{-\nu}(z)\right]$

$\qquad = (1 + i\cot\nu\pi)e^{i\nu\pi}I_\nu(z) - i\csc\nu\pi I_{-\nu}(z)$

$\qquad = i\csc\nu\pi\left[I_\nu(z) - I_{-\nu}(z)\right] = -\dfrac{2}{\pi}iK_\nu(z)$。

同样可得 $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ 时, $K_\nu(z) = -\dfrac{\pi}{2}ie^{-i\nu\pi/2}H_\nu^{(2)}\left(ze^{-i\pi/2}\right)$。

335. 证明：（1）$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\sin bx I_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\cos bx I_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}}$ ，其中 $a>0,b>0$ ；

（2）$\int_0^\infty J_0(ax)K_0(bx)xdx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ， $a>0,\mathrm{Re}\,b>0$ 。

（1）$I_0(x)=J_0(ix)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x\cos\theta}d\theta$ （见附录），

$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}a+ib\right)x}I_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx=\int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}a+ib\right)x}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{1}{2}ax\cos\theta}d\theta dx$

$\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^\infty e^{-x\left[\frac{1}{2}a(1+\cos\theta)+ib\right]}dx=\frac{1}{a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\cos\theta+i\frac{2b}{a}}$

$\quad=\frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+1+i\frac{2b}{a}}\overset{x=\tan\frac{\theta}{2}}{=}\frac{4}{a\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}+1+i\frac{2b}{a}}\frac{dx}{1+x^2}$

$\quad=\frac{2}{b\pi i}\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1-i\frac{a}{b}}$ ，$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$（＊）

设 $-1+i\frac{a}{b}$ 的平方根为 $\xi+i\eta$ ，即 $(\xi+i\eta)^2=-1+i\frac{a}{b}$ ，则 $\xi^2-\eta^2=-1$ ， $2\xi\eta=\frac{a}{b}$ ，解得

$\xi_1+i\eta_1=\frac{a}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}}+i\frac{1}{\sqrt{2b}}\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}$ ，另一根为 $-\xi_1-i\eta_1$ ，

（＊）式 $=\frac{2}{b\pi i}\pi i\,\mathrm{res}\left[\frac{1}{(z-\xi_1-i\eta_1)(z+\xi_1+i\eta_1)}\right]_{z=\xi_1+i\eta_1}=\frac{1}{b}\frac{1}{\xi_1+i\eta_1}=\frac{1}{b}\frac{1}{\xi_1^2+\eta_1^2}(\xi_1-i\eta_1)$

$\quad=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}}-i\frac{1}{\sqrt{2b}}\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ 。

取实部和虚部即可得欲证两式。

（2）由 337 题 $K_0(x)$ 的积分表示，

$\int_0^\infty J_0(ax)K_0(bx)xdx=\int_0^\infty J_0(ax)xdx\int_0^\infty e^{-bx\mathrm{ch}\,t}dt=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-bx\mathrm{ch}\,t}J_0(ax)xdx$ ，

由 318（1）题， $\int_0^\infty e^{-bx\mathrm{ch}\,t}J_0(ax)xdx=\frac{b\,\mathrm{ch}\,t}{\left(b^2\,\mathrm{ch}^2\,t+a^2\right)^{3/2}}$ ，

所以 $\int_0^\infty J_0(ax)K_0(bx)xdx = b\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{ch}t}{\left(b^2\operatorname{ch}^2 t + a^2\right)^{3/2}}dt = b\int_0^\infty \dfrac{d\operatorname{sh}t}{\left(a^2+b^2+b^2\operatorname{sh}^2 t\right)^{3/2}}$

$$= \dfrac{b}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}\int_0^\infty \dfrac{dx}{\left(1+\dfrac{b^2}{a^2+b^2}x^2\right)^{3/2}} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\int_0^\infty \dfrac{dy}{\left(1+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\overset{y=\tan\theta}{=} \dfrac{1}{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \dfrac{1}{a^2+b^2}\text{。}$$

336．高为 h，半径为 a 的圆柱体，上下底保持温度为 0，而柱面温度为 $u_0\sin\dfrac{2\pi}{h}z$，求柱

体内的稳定温度分布。
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \\[2mm] u\big|_{z=0}=0, u\big|_{z=h}=0 \\[2mm] u\big|_{\rho=0}=\text{有界}, u\big|_{\rho=a}=u_0\sin\dfrac{2\pi}{h}z \end{cases}$$

分离变量得本征值问题 $\begin{cases} Z''+k^2 Z=0 \\ Z(0)=0, Z(h)=0 \end{cases}$ 及 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)-k^2\mathrm{P}=0$。

解得本征值 $k_n=\dfrac{n\pi}{h}$，本征函数 $Z_n(z)=\sin\dfrac{n\pi}{h}z$（$n=1,2,\cdots$），$\mathrm{P}_n(\rho)=I_0\left(\dfrac{n\pi}{h}\rho\right)$。

$u(\rho,z)=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty A_n I_0\left(\dfrac{n\pi}{h}\rho\right)\sin\dfrac{n\pi}{h}z$。$u\big|_{\rho=a}=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty A_n I_0\left(\dfrac{n\pi a}{h}\right)\sin\dfrac{n\pi}{h}z=u_0\sin\dfrac{2\pi}{h}z$，

所以 $A_2=\dfrac{u_0}{I_0\left(\dfrac{2\pi a}{h}\right)}$，其余 $A_n=0$，即 $u(\rho,z)=\dfrac{u_0}{I_0\left(\dfrac{2\pi a}{h}\right)}I_0\left(\dfrac{2\pi}{h}\rho\right)\sin\dfrac{2\pi}{h}z$。

337．证明：$K_0(x)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}t}dt$（$x>0$）满足零阶虚宗量 Bessel 方程，由此证明当 x 很

大时，$K_0(x)$ 的渐近形式为 $\dfrac{A}{\sqrt{x}}e^{-x}$，定出常数 A。

$xK_0''(x)+K_0'(x)-xK_0(x)=x\displaystyle\int_0^\infty\left(\operatorname{ch}^2 t-1\right)e^{-x\operatorname{ch}t}dt-\int_0^\infty\operatorname{ch}t\, e^{-x\operatorname{ch}t}dt$

$=x\displaystyle\int_0^\infty\operatorname{sh}^2 t\, e^{-x\operatorname{ch}t}dt-\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}t}d\operatorname{sh}t=x\int_0^\infty\operatorname{sh}^2 t\, e^{-x\operatorname{ch}t}dt-\operatorname{sh}t\, e^{-x\operatorname{ch}t}\Big|_{t=0}^{t\to\infty}-x\int_0^\infty\operatorname{sh}^2 t\, e^{-x\operatorname{ch}t}dt=0$

即 $K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x\mathrm{ch}t}dt$ 满足零阶虚宗量 Bessel 方程。

作代换 $u = \mathrm{ch}\,t$，即 $t = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)$，

则 $K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x\mathrm{ch}t}dt = \int_1^\infty \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u^2-1}}du \overset{x(u-1)=y}{=} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{2y + \dfrac{y^2}{x}}}dy$，

令积分式中 $x \to \infty$ 有 $K_0(x) \to \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \dfrac{e^{-y}}{\sqrt{2y}}dy \overset{y=t^2}{=} \sqrt{2}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$。

338. 假定零阶虚宗量 Bessel 方程 $y'' + \dfrac{1}{x}y' - y = 0$ 的形式解为 $y \sim e^{\lambda x}x^{-\rho}\sum_{k=0}^\infty a_k x^{-k}$，$a_0 \neq 0$，

试求出此方程的两个形式解 $y_1 \sim c_1 \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\left[1 + \dfrac{1^2}{1\cdot(8x)} + \dfrac{1^2\cdot 3^2}{2!(8x)^2} + \cdots\right]$，

$y_2 \sim c_2 \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left[1 - \dfrac{1^2}{1\cdot(8x)} + \dfrac{1^2\cdot 3^2}{2!(8x)^2} - + \cdots\right]$。如果取 $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$c_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$，这正好就是

$I_0(x)$ 和 $K_0(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的渐进展开。

将 $y = e^{\lambda x}x^{-\rho}\sum_{k=0}^\infty a_k x^{-k}$ 代入方程可得

$\left(\lambda^2 - 1\right)\sum_{k=0}^\infty a_k x^{-k} - \lambda\sum_{k=1}^\infty (2k+2\rho-3)a_{k-1}x^{-k} + \sum_{k=2}^\infty (k+\rho-2)^2 a_{k-2}x^{-k} = 0$。

由常数项为零可得 $\lambda^2 - 1 = 0$，由 x^{-1} 项系数为零可得 $\rho = \dfrac{1}{2}$，

取 $\lambda = 1$ 可得递推关系

$a_k = \dfrac{\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2}{2k}a_{k-1} = \dfrac{\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2}{2k}\dfrac{\left(k - 1 - \dfrac{1}{2}\right)^2}{2k-2}\cdots\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{2}a_0 = \dfrac{(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots 1}{2^{3k}k!}a_0$，

即 $y_1 \sim a_0 \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty \dfrac{(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots 1}{2^{3k}k!}x^{-k}\right]$。

取 $\lambda = -1$ 可得 $a_k = -\dfrac{\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2}{2k}a_{k-1} = (-1)^k \dfrac{(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots 1}{2^{3k}k!}a_0$

即 $y_1 \sim a_0 \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{(2k-1)^2 (2k-3)^2 \cdots 1}{2^{3k} k!} x^{-k} \right]$。

附录：

令 $\exp\left[\dfrac{x}{2} \left(t - \dfrac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$ 中 $t = ie^{i\theta}$ 得 $e^{ix\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) e^{in\theta}$，所以

$J_n(x) = \dfrac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\cos\theta - n\theta)} d\theta$，

将 x 换成 ix 得 $I_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x\cos\theta - in\theta} d\theta$。

书上已得 $J_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)} d\theta$，所以 $I_n(x) = \dfrac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x\sin\theta - in\theta} d\theta$。

339. 圆内 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数 $\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = 0 \end{cases}$ 是

$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln R_1 - \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a}{r'}$。其中 $R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}$，

$R_1 = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta}$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 的夹角，$\boldsymbol{r}_1 = \left(\dfrac{a}{r'}\right)^2 \boldsymbol{r}'$，$a$ 是圆半径。试证

明圆内定解问题 $\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0 \\ u(\boldsymbol{r})\big|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$ 的解可表为 $u(r,\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{(a^2-r^2)f(\varphi')d\varphi'}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi-\varphi')}$。

$\dfrac{\partial G}{\partial r'} = -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{r'-r\cos\theta}{R^2} + \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{-\dfrac{a^4}{r'^3} + \dfrac{ra^2}{r'^2}\cos\theta}{R_1^2} + \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 r'}$，

$\dfrac{\partial G}{\partial r'}\bigg|_{r'=a} = -\dfrac{1}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{a-r\cos\theta}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta} + \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 a} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 a}\dfrac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$。

将 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$ 两边乘 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 得 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$，　　　　　　　　　　（a）

将 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 两边乘 $u(\boldsymbol{r})$ 得 $u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$。　（b）

（a）$-$（b），两边在圆域内积分得 $\displaystyle\iint_S \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]dS = \dfrac{1}{\varepsilon_0}u(\boldsymbol{r}')$，

由 Green 公式得 $u(\boldsymbol{r}') = \varepsilon_0\displaystyle\int_C \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial r} - u(\boldsymbol{r})\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial r}\right]dl$，其中 C 是圆周 $r=a$。

交换 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 有 $u(r,\varphi) = -\varepsilon_0\displaystyle\int_0^{2\pi} u(\boldsymbol{r}')\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial r'}\bigg|_{r'=a} a\,d\varphi' = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{(a^2-r^2)f(\varphi')d\varphi'}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{(a^2-r^2)f(\varphi')d\varphi'}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi-\varphi')}$。

340.（1）用电像法求出球内 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数

$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = 0 \end{cases}$；

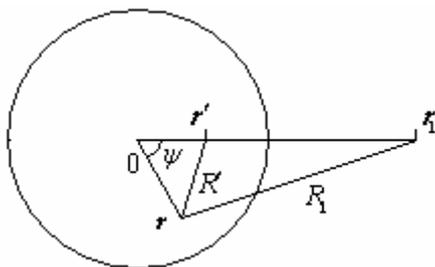（2）求出边界面（球面 $r=a$ ）上各点的感应电荷密度 $\sigma(\theta,\varphi)$ ；

（3）证明像电荷和感应电荷在球内完全等效；

（4）证明球内 Laplace 方程第一边值问题 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u\big|_{r=a} = f(\theta,\varphi) \end{cases}$ 的解是

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left(a^2-r^2\right)f\left(\theta',\varphi'\right)}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\psi\right)^{3/2}}\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$ ，其中 ψ 是 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ 与

$\boldsymbol{r}'\left(r',\theta',\varphi'\right)$ 的夹角， $\cos\psi=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\varphi-\varphi'\right)$ 。

（1）如下图， $\boldsymbol{r}'$ 处有电荷 $q'=1$ ，由对称性，像电荷应放置在 $\boldsymbol{r}'$ 的延长线 $\boldsymbol{r}_1$ 处，带电量 q_1 ，

则 $\boldsymbol{r}$ 处电势为 $G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{R'}+\frac{q_1}{R_1}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right)$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}}+\frac{q_1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\psi}}\right)$$ 。

$$G\big|_{r=a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+r'^2-2ar'\cos\psi}}+\frac{q_1}{\sqrt{a^2+r_1^2-2ar_1\cos\psi}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-2\frac{r'}{a}\cos\psi}}+\frac{q_1}{r_1\sqrt{1+\left(\frac{a}{r_1}\right)^2-2\frac{a}{r_1}\cos\psi}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\psi)\left(\frac{r'}{a}\right)^l+\frac{q_1}{r_1}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\psi)\left(\frac{a}{r_1}\right)^l\right]=0$$ ，

所以有 $\frac{1}{a}\left(\frac{r'}{a}\right)^l+\frac{q_1}{r_1}\left(\frac{a}{r_1}\right)^l=0$ ，即 $q_1=-\frac{r_1}{a}\left(\frac{r'r_1}{a^2}\right)^l$ 。可看出 $\left(\frac{r'r_1}{a^2}\right)^l$ 的值与 l 无关，那么只有

$\frac{r'r_1}{a^2}=1$ ，即 $r_1=\frac{a^2}{r'}$ ， $q_1=-\frac{a}{r'}$ ，所以

$$G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}}-\frac{a}{r'}\frac{1}{\sqrt{r^2+\dfrac{a^4}{r'^2}-2\dfrac{a^2}{r'}r\cos\psi}}\right)\text{。}$$

其中 $\cos\psi=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{rr'}$

$$=\frac{\left(r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+r\cos\theta\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(r'\sin\theta'\cos\varphi'\boldsymbol{i}+r'\sin\theta'\sin\varphi'\boldsymbol{j}+r'\cos\theta'\boldsymbol{k}\right)}{rr'}$$

$$=\sin\theta\cos\varphi\sin\theta'\cos\varphi'+\sin\theta\sin\varphi\sin\theta'\sin\varphi'+\cos\theta\cos\theta'$$

$$=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\varphi-\varphi'\right)\text{。}$$

（2）由电场边界条件，$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left(\boldsymbol{D}\big|_{r=a^+}-\boldsymbol{D}\big|_{r=a^-}\right)=\sigma$。由于 $G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)\big|_{r=a}=0$，可将边界球面看

作接地的导体球，即 $\boldsymbol{D}\big|_{r=a^+}=0$，又由于 $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{D}=D_r=\varepsilon_0 E_r=-\varepsilon_0\dfrac{\partial G}{\partial r}$，所以 $\sigma=\varepsilon_0\dfrac{\partial G}{\partial r}\bigg|_{r=a^-}$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-a+r'\cos\psi}{\left(a^2+r'^2-2ar'\cos\psi\right)^{3/2}}+\frac{a\left(ar'^2-a^2r'\cos\psi\right)}{\left(a^2r'^2+a^4-2a^3r'\cos\psi\right)^{3/2}}\right]=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1-\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2}{\left[1+\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2-2\dfrac{r'}{a}\cos\psi\right]^{3/2}}\text{。}$$

取 $\boldsymbol{r}'$ 方向为 z 方向，即 $\theta'=0$，则 $\cos\psi=\cos\theta$，所以

$$\sigma\left(\theta,\varphi\right)=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1-\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2}{\left[1-2\dfrac{r'}{a}\cos\theta+\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2\right]^{3/2}}=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1-\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2}{\dfrac{r'}{a}}\sum_{l=0}^{\infty}P_l'\left(\cos\theta\right)\left(\frac{r'}{a}\right)^l\text{。}$$

（3）感应电荷在球内产生的电场为（γ 为球面上点 $\left(a,\theta',\varphi'\right)$ 与球内点 $\left(r,\theta,\varphi\right)$ 的夹角，

$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\varphi-\varphi'\right)$。）：

$$G_\sigma\left(r,\theta,\varphi\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma\left(\theta',\varphi'\right)}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\gamma}}a^2\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$=\frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma\left(\theta',\varphi'\right)}{\sqrt{1-2\dfrac{r}{a}\cos\gamma+\left(\dfrac{r}{a}\right)^2}}\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$=\frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma\left(\theta',\varphi'\right)\sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(\cos\gamma\right)\left(\frac{r}{a}\right)^l\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi a}\frac{1-\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2}{\dfrac{r'}{a}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta')\left(\frac{r'}{a}\right)^l\cdot\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\gamma)\left(\frac{r}{a}\right)^l\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi a}\frac{1-\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2}{\dfrac{r'}{a}}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{a}\right)^k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_k'(\cos\theta')P_l(\cos\gamma)\sin\theta'd\theta'd\varphi'。$$

有 Legendre 多项式的加法公式：

$$P_l(\cos\gamma)=P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')}。$$

（见王竹溪，郭敦仁《特殊函数概论》5.14 节）所以，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_k'(\cos\theta')P_l(\cos\gamma)\sin\theta'd\theta'd\varphi'=2\pi P_l(\cos\theta)\int_0^{\pi}P_k'(\cos\theta')P_l(\cos\theta')\sin\theta'd\theta'$$

$$+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)\int_0^{\pi}P_k'(\cos\theta')P_l^m(\cos\theta')\sin\theta'd\theta'\int_0^{2\pi}e^{im(\varphi-\varphi')}d\varphi'$$

$$=2\pi P_l(\cos\theta)\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l(x)dx。$$

由习题 15 第 283 题结论，$\displaystyle\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l(x)dx=\begin{cases}2,k=l+2n+1\\0,\text{others}\end{cases}$ （$n=0,1,\cdots$），

即 $k=l+2n+1$ 时，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_k'(\cos\theta')P_l(\cos\gamma)\sin\theta'd\theta'd\varphi'=4\pi P_l(\cos\theta)$，其他情况该积分都为 0，所以

$$G_\sigma=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2}{\dfrac{r'}{a}}\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^l\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{a}\right)^{2n+1}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{1+\dfrac{r^2r'^2}{a^4}-2\dfrac{rr'}{a^2}\cos\theta}}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r'}\frac{1}{\sqrt{r^2+\dfrac{a^4}{r'^2}-2r\dfrac{a^2}{r'}\cos\theta}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

即与像电荷产生电势相等。

（4）$\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial r'}=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{r'-r\cos\psi}{\left(r^2+r'^2-2rr'\cos\psi\right)^{3/2}}-\dfrac{a\left(\dfrac{r}{r'}\right)^2-\left(\dfrac{a}{r'}\right)^3 r\cos\psi}{\left(r^2+\dfrac{a^4}{r'^2}-2\dfrac{a^2}{r'}r\cos\psi\right)^{3/2}}\right]$，

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial r'}\right|_{r'=a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{r^2-a^2}{\left(a^2+r^2-2ar\cos\psi\right)^{3/2}}\text{。}$$

由 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=0$ 和 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 可得

$$u(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\iiint\limits_V\left[G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\nabla^2 u(\boldsymbol{r}')-u(\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\right]dV'$$

$$=\varepsilon_0\oiint\limits_S\left[G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\right]dS$$

$$=-\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta',\varphi')\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial r'}\right|_{r'=a}a^2\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

$$=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left(a^2-r^2\right)f(\theta',\varphi')}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\psi\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' d\varphi'\text{。}$$

341. 证明互易定理：若 Φ 是由 V 中体电荷密度 ρ 及面 Σ（V 的边界面）上面点荷密度 σ 产

生的静电势，Φ' 是由体电荷密度 ρ' 及面点荷密度 σ' 产生的静电势，则

$$\iiint_V\rho\Phi'dV+\oiint_\Sigma\sigma\Phi'dS=\iiint_V\rho'\Phi dV+\oiint_\Sigma\sigma'\Phi dS\text{。}$$

在 V 内有 $\nabla^2\Phi=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$，$\nabla^2\Phi'=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho'$。第一式两边乘 Φ' 减去第二式两边乘 Φ 得

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho'\Phi dV-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho\Phi'dV=\iiint_V\left(\Phi'\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\Phi'\right)dV$$

$$=\oiint_\Sigma\left(\Phi'\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial\Phi'}{\partial n}\right)dS=-\oiint_\Sigma\left(\Phi' E_n-\Phi E_n'\right)dS\text{，}$$

上面 E_n 表示电场法向分量，由电场边界条件 $E_n=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，$E_n'=-\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$（$V$ 外电场为 0）得

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho'\Phi dV-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho\Phi'dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\oiint_\Sigma\left(\sigma\Phi'-\sigma'\Phi\right)dS\text{，}\quad\text{即}$$

$$\iiint_V\rho\Phi'dV+\oiint_\Sigma\sigma\Phi'dS=\iiint_V\rho'\Phi dV+\oiint_\Sigma\sigma'\Phi dS\text{。}$$

342．用 Fourier 变换法求三维无界空间 Helmholtz 方程的 Green 函数

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)。$$

记 $\boldsymbol{k}' = k_x'\boldsymbol{i} + k_y'\boldsymbol{j} + k_z'\boldsymbol{k}$，$k'^2 = k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2$，三维 Fourier 变换和反变换为：

$$\tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right) = \iiint G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}\right)d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)\exp\left[-i\left(k_x'x + k_y'y + k_z'z\right)\right]dxdydz；$$

$$G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\iiint \tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}\right)d\boldsymbol{k}'$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right)\exp\left[i\left(k_x'x + k_y'y + k_z'z\right)\right]dk_x'dk_y'dk_z'。$$

方程 $\left(\nabla^2 + k^2\right)G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)$ 两边对 $\boldsymbol{r}$ 作三维 Fourier 变换得

$$\left(-k'^2 + k^2\right)\tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\exp\left(-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'\right)，\quad \text{所以} \ \tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\exp\left(-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'\right)}{k'^2 - k^2}，$$

取 Fourier 反变换得 $G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right) = \dfrac{1}{\left(2\pi\right)^3\varepsilon_0}\iiint \dfrac{\exp\left[i\boldsymbol{k}'\cdot\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)\right]}{k'^2 - k^2}d\boldsymbol{k}'$

可看出 $G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)$ 只是 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 的函数，可令 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，在 $\boldsymbol{k}'$ 空间中以 $\boldsymbol{R}$ 方向为 z 方向建立球坐标系 $\left(k',\theta,\varphi\right)$ 计算这个积分：

$$G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^3\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(ik'R\cos\theta\right)}{k'^2 - k^2}k'^2\sin\theta\, dk'd\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\right)^2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{k'^2}{k'^2 - k^2}dk'\int_0^{\pi} e^{ik'R\cos\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\right)^2 iR\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{k'}{k'^2 - k^2}\left(e^{ik'R} - e^{-ik'R}\right)dk' = \frac{1}{\left(2\pi\right)^2 iR\varepsilon_0}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k'e^{ik'R}}{k'^2 - k^2}dk'$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\right)^2 iR\varepsilon_0}\lim_{\eta\to 0^+}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k'}{k'^2 - \left(k+i\eta\right)^2}e^{ik'R}dk'。$$

用留数定理可算出

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k'}{k'^2-\left(k+i\eta\right)^2}e^{ik'R}dk'=2\pi i\,\text{res}\left[\frac{ze^{izR}}{z^2-\left(k+i\eta\right)^2}\right]_{z=k+i\eta}=\pi ie^{-R\eta}e^{ikR}\,,$$

所以 $G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'}\right)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^{ikR}}{R}$ 。

343．一无穷长弦，$t=t'$ 时其 $x=x'$ 处受到瞬时的打击，冲量为 I 。试求解弦的横振动，设初位移和初速度都为 0。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x^2}=\dfrac{I}{\rho}\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)\\[2mm]G\left(x,t;x',t'\right)\big|_{x\to\pm\infty}\text{ 有界},G\left(x,t;x',t'\right)\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0\end{cases},$$

方程两边对变量 t 作 Laplace 变换得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde{G}\left(x,p;x',t'\right)}{\partial x^2}-\left(\dfrac{p}{a}\right)^2\tilde{G}\left(x,p;x',t'\right)=-\dfrac{I}{\rho a^2}e^{-pt'}\delta\left(x-x'\right)\\[2mm]G\left(x,p;x',t'\right)\big|_{x\to\pm\infty}\text{ 有界}\end{cases}\text{，可限定 Re }p>0 \text{。}$$

方程两边对 x 在区间 $\left[x'-\varepsilon,x'+\varepsilon\right]$ 上积分，并令 $\varepsilon\to 0^+$ 得

$$\frac{\partial\tilde{G}}{\partial x}\bigg|_{x=x'+0}-\frac{\partial\tilde{G}}{\partial x}\bigg|_{x=x'-0}=-\frac{I}{\rho a^2}e^{-pt'}\text{，另外还有连续条件 }\tilde{G}\big|_{x=x'+0}=\tilde{G}\big|_{x=x'-0}\text{（若 }\tilde{G}\text{ 在 }x=x'\text{ 点}$$

不连续，方程右边必出现 $\delta'\left(x-x'\right)$ 项）。

在 $x\neq x'$ 点，方程为齐次方程，因此，上面的问题即为带连接边界条件的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde{G}_1}{\partial x^2}-\left(\dfrac{p}{a}\right)^2\tilde{G}_1=0,x<x'\\[2mm]\tilde{G}_1\big|_{x\to-\infty}=0\end{cases},\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde{G}_2}{\partial x^2}-\left(\dfrac{p}{a}\right)^2\tilde{G}_2=0,x>x'\\[2mm]\dfrac{\partial\tilde{G}_2}{\partial x}\bigg|_{x\to\infty}=0\end{cases},\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{G}_2}{\partial x}\bigg|_{x=x'^+}-\dfrac{\partial\tilde{G}_1}{\partial x}\bigg|_{x=x'^-}=-\dfrac{I}{\rho a^2}e^{-pt'}\\[2mm]\tilde{G}_2\big|_{x=x'^+}=\tilde{G}_1\big|_{x=x'^-}\end{cases}\text{。}$$

可解出 $\tilde{G}\left(x,p;x',t'\right)=\begin{cases}Ae^{\frac{p}{a}x},x<x'\\[2mm]Be^{-\frac{p}{a}x},x>x'\end{cases}$ 。由连接边界条件定出 $A=\dfrac{I}{2\rho a}\dfrac{e^{-p\left(t'+\frac{x'}{a}\right)}}{p}$ ，

$B_2=\dfrac{I}{2\rho a}\dfrac{e^{-p\left(t'-\frac{x'}{a}\right)}}{p}$ ，即 $\tilde{G}\left(x,p;x',t'\right)=\begin{cases}\dfrac{I}{2\rho a}\dfrac{e^{-p\left(t'-\frac{x-x'}{a}\right)}}{p},x<x'\\[4mm]\dfrac{I}{2\rho a}\dfrac{e^{-p\left(t'+\frac{x-x'}{a}\right)}}{p},x>x'\end{cases}$ 。取反变换得

$$G\left(x,t;x',t'\right)=\begin{cases}\dfrac{I}{2\rho a}\eta\left(t-t'+\dfrac{x-x'}{a}\right),x<x'\\[4mm]\dfrac{I}{2\rho a}\eta\left(t-t'-\dfrac{x-x'}{a}\right),x>x'\end{cases}=\dfrac{I}{2\rho a}\eta\left(t-t'-\dfrac{|x-x'|}{a}\right)。$$

344．两端固定的弦，长为 l ， $t=t'$ 时用细锤敲击弦上 $x=x'$ 点，使得该点获得冲量 I 。求解弦的横振动，设初位移和初速度都为 0。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x^2}=\dfrac{I}{\rho}\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)\\[3mm]G\left(x,t;x',t'\right)\big|_{x=0}=0,G\left(x,t;x',t'\right)\big|_{x=l}=0\\[3mm]G\left(x,t;x',t'\right)\big|_{t<t'}=0,\dfrac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t}\bigg|_{t<t'}=0\end{cases}。$$

可将 $G\left(x,t;x',t'\right)$ 用本征函数 $\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 展开： $G\left(x,t;x',t'\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}g_n\left(t\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ ，

将 $\delta\left(x-x'\right)$ 也按 $\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 展开： $\delta\left(x-x'\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ ，可求出

$$c_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\delta\left(x-x'\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx=\dfrac{2}{l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'，\ 即\ \delta\left(x-x'\right)=\dfrac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi}{l}x。$$

代入方程得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}g_n''\left(t\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}g_n\left(t\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x=\dfrac{2I}{\rho l}\delta\left(t-t'\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi}{l}x，$$

再由初始条件可得 $\begin{cases}g_n''\left(t\right)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 g_n\left(t\right)=\dfrac{2I}{\rho l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\delta\left(t-t'\right)\\[3mm]g_n\big|_{t<t'}=0,g_n'\big|_{t<t'}=0\end{cases}。$

对方程两边在 $t=t'$ 附近积分可得 $g_n'\left(t'^{+}\right)=g_n'\left(t'^{-}\right)+\dfrac{2I}{\rho l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'=\dfrac{2I}{\rho l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'$ ，再由

$g_n\left(t\right)$ 在 $t=t'$ 的连续性可得 $g_n\left(t'^{+}\right)=g_n\left(t'^{-}\right)=0$ ，上面问题即为

$$\begin{cases}g_n''\left(t\right)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 g_n\left(t\right)=0,t>t'\\[3mm]g_n\left(t'\right)=0,g_n'\left(t'\right)=\dfrac{2I}{\rho l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\end{cases}，\ 解得\ g_n\left(t\right)=\dfrac{2I}{n\pi a\rho}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi a}{l}\left(t-t'\right)。$$

即 $G(x,t;x',t') = \dfrac{2I}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin\dfrac{n\pi}{l}x' \sin\dfrac{n\pi}{l}x \sin\dfrac{n\pi a}{l}(t-t')\eta(t-t')$。

345．求解点热源在无穷长细杆上产生的温度分布与变化：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t') \\ G(x,t;x',t')\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$。

对变量 t 作 Laplace 变换得 $\dfrac{\partial^2 \tilde{G}(x,p;x',t')}{\partial x^2} - \dfrac{p}{\kappa}\tilde{G}(x,p;x',t') = -\dfrac{e^{-pt'}}{\kappa}\delta(x-x')$，可限定

$-\pi/2 < \mathrm{Re}\, p < \pi/2$。由自然条件 $\tilde{G}(x,t;x',t')\big|_{x\to\pm\infty}$ 有界解得 $\tilde{G} = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x},\ x < x' \\ Be^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x},\ x > x' \end{cases}$。

由连接条件 $\tilde{G}\big|_{x=x'^-} = \tilde{G}\big|_{x=x'^+}$，$\dfrac{\partial\tilde{G}}{\partial x}\bigg|_{x=x'^+} - \dfrac{\partial\tilde{G}}{\partial x}\bigg|_{x=x'^-} = -\dfrac{e^{-pt'}}{\kappa}$ 可得 $\tilde{G} = \dfrac{1}{2\sqrt{\kappa p}}e^{-pt'}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}|x-x'|}$。

反演得 $G(x,t;x',t') = \dfrac{1}{2\sqrt{\kappa\pi(t-t')}}\exp\left[-\dfrac{(x-x')^2}{4\kappa(t-t')}\right]\eta(t-t')$。

346．试证明一维热传导方程 Green 函数 $G(x,t;x',t')$ 的互易性：$G(x,t;x',t') = G(x',-t';x,t)$，

其中 $G(x,t;x',t')$ 满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t') \\ G\big|_{x=0} = 0,\ G\big|_{x=l} = 0,\ G\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$。

又可写成 $\begin{cases} \dfrac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t') \\ G\big|_{x=0} = 0,\ G\big|_{x=l} = 0,\ G\big|_{t<t'} = 0 \end{cases}$。

对于 $G(x,-t;x'',-t'')$ 有 $\begin{cases} -\dfrac{\partial G(x,-t;x'',-t'')}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 G(x,-t;x'',-t'')}{\partial x^2} = \delta(x-x'')\delta(t-t'') \\ G\big|_{x=0} = 0,\ G\big|_{x=l} = 0,\ G(x,-t;x'',-t'')\big|_{t>t''} = 0 \end{cases}$，

将 $G(x,t;x',t')$ 的方程两边乘 $G(x,-t;x'',-t'')$ 减去 $G(x,-t;x'',-t'')$ 的方程两边乘 $G(x,t;x',t')$

可得：$G(x',-t';x'',-t'')\delta(x-x')\delta(t-t') - G(x'',t'';x',t')\delta(x-x'')\delta(t-t'')$

$$= G(x,-t;x'',-t'') \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t} + G(x,t;x',t') \frac{\partial G(x,-t;x'',-t'')}{\partial t}$$

$$+ \kappa G(x,t;x',t') \frac{\partial^2 G(x,-t;x'',t'')}{\partial x^2} - \kappa G(x,-t;x'',-t'') \frac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \Big[G(x,-t;x'',-t'') G(x,t;x',t') \Big]$$

$$+ \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[G(x,t;x',t') \frac{\partial G(x,-t;x'',t'')}{\partial x} - G(x,-t;x'',-t'') \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x} \right]。$$

两边对 x 从 0 积到 l 得：

$$G(x',-t';x'',-t'') \delta(t-t') - G(x'',t'';x',t') \delta(t-t'')$$

$$= \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \Big[G(x,-t;x'',-t'') G(x,t;x',t') \Big] dx$$

$$+ \kappa \left[G(x,t;x',t') \frac{\partial G(x,-t;x'',t'')}{\partial x} - G(x,-t;x'',-t'') \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=l}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \Big[G(x,-t;x'',-t'') G(x,t;x',t') \Big] dx ,$$

再对 t 从 0 积到 ∞，由于 $G(x,-t;x'',-t'')\big|_{t>t''} = 0$，所以

$$G(x',-t';x'',-t'') - G(x'',t'';x',t') = \int_0^l \Big[G(x,-t;x'',-t'') G(x,t;x',t') \Big]_{t=0}^{t\to\infty} dx = 0 ,$$

即 $G(x',-t';x'',-t'') = G(x'',t'';x',t')$，也就是 $G(x,t;x',t') = G(x',-t';x,t)$。

347．用 Green 函数法解无界弦的横振动问题：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}。$$

令 343 题中 $\dfrac{I}{\rho} = 1$，即 $\dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$，

将 x 与 x' 互换，t 与 t' 互换得 $\dfrac{\partial^2 G(x',t';x,t)}{\partial t'^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 G(x',t';x,t)}{\partial x'^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$，

由 $G(x,t;x',t')$ 的互易性得 $\dfrac{\partial^2 G(x,-t;x',-t')}{\partial t'^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 G(x,-t;x',-t')}{\partial x'^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$，

将 $-t$ 换成 t, $-t'$ 换成 t' 得 $\dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial t'^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x'^2} = \delta(x-x')\delta(t-t')$。（a）

又有 $\dfrac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} = 0$。　　　　　　　　　　　（b）

（a）$\times\ u(x',t')\ -$（b）$\times\ G(x,t;x',t')$ 得：

$$u(x,t)\delta(x-x')\delta(t-t') = \frac{\partial}{\partial t'}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'} - G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'} \right]$$

$$+ a^2 \frac{\partial}{\partial x'}\left[G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'} - u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'} \right]。$$

两边对 x' 在 $(-\infty,\infty)$ 上积分得

$$u(x,t)\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t'}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'} - G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'} \right] dx'$$

$$+ a^2 \left[G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'} - u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'} \right]_{x'\to-\infty}^{x'\to\infty},$$

第 343 题已求得 $G = \dfrac{1}{2a}\eta\left(t-t' - \dfrac{|x-x'|}{a} \right)$, 所以 $G\big|_{x'\to\pm\infty} = \dfrac{1}{2a}\eta(-\infty) = 0$,

$\dfrac{\partial G}{\partial x'} = \operatorname{sgn}(x-x')\dfrac{1}{2a^2}\delta\left(t-t' - \dfrac{|x-x'|}{a} \right)$, $\dfrac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'\to\pm\infty} = \pm\dfrac{1}{2a^2}\delta(-\infty) = 0$,

所以 $u(x,t)\delta(t-t') = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t'}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'} - G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'} \right] dx'$。

两边对 t' 在 $[0,\infty)$ 上积分得

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'} - G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'} \right]_{t'=0}^{t'\to\infty} dx'。$$

由于 $G\big|_{t'\to\infty} = \dfrac{1}{2a}\eta(-\infty) = 0$, $G\big|_{t'=0} = \dfrac{1}{2a}\eta\left(t - \dfrac{|x-x'|}{a} \right)$, $\dfrac{\partial G}{\partial t'} = -\dfrac{1}{2a}\delta\left(t-t' - \dfrac{|x-x'|}{a} \right)$,

$\dfrac{\partial G}{\partial t'}\bigg|_{t'\to\infty} = -\dfrac{1}{2a}\delta(-\infty) = 0$, $\dfrac{\partial G}{\partial t'}\bigg|_{t'=0} = -\dfrac{1}{2a}\delta\left(t - \dfrac{|x-x'|}{a} \right)$,

所以 $u(x,t) = -\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x',t')\dfrac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'} - G(x,t;x',t')\dfrac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0} dx'$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x')\delta\left(t - \frac{|x-x'|}{a}\right) + \eta\left(t - \frac{|x-x'|}{a}\right)\psi(x')\right]dx'$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\varphi(x')\delta(x'-x+at)dx' + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}\psi(x')dx'$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}\varphi(x')\delta(x'-x-at)dx' + \frac{1}{2a}\int_{x}^{x+at}\psi(x')dx'$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x')dx'。$$

348. 用 Green 函数法解 215 题：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\big|_{x=0}=0, u\big|_{x=l}=0, u\big|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x, 0\le x<c \\ \dfrac{h(l-x)}{l-c}, c\le x<l \end{cases}, \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \end{cases}。$

第 344 题已求得 $G = \dfrac{2}{\pi a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi}{l}x\sin\dfrac{n\pi a}{l}(t-t')\eta(t-t')$ （令 $\dfrac{I}{\rho}=1$）。

重复上题步骤可得 $u(x,t) = \int_0^l\left(G\dfrac{\partial u}{\partial t'} - u\dfrac{\partial G}{\partial t'}\right)_{t'=0}dx' = -\int_0^l u(x',0)\dfrac{\partial G}{\partial t'}\bigg|_{t'=0}dx'$。

$\dfrac{\partial G}{\partial t'}\bigg|_{t'=0} = -\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi}{l}x\cos\dfrac{n\pi a}{l}t$，所以

$u(x,t) = \dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{l}x\cos\dfrac{n\pi a}{l}t\int_0^l u(x',0)\sin\dfrac{n\pi}{l}x'dx'$

$$= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi a}{l}t\left[\frac{h}{c}\int_0^c x'\sin\frac{n\pi}{l}x'dx' + \frac{h}{l-c}\int_c^l(l-x')\sin\frac{n\pi}{l}x'dx'\right]$$

$$= \frac{2hl^2}{c(l-c)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi a}{l}t。$$

349. 用 Green 法解无界弦的热传导问题：$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}。$

第 345 题已求得 $G(x,t;x',t') = \dfrac{1}{2\sqrt{\kappa\pi(t-t')}} \exp\left[-\dfrac{(x-x')^2}{4\kappa(t-t')}\right]\eta(t-t')$

重复 247 题步骤可得 $u(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\,G\big|_{t'=0}\,dx' = \dfrac{1}{2\sqrt{\kappa\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\exp\left[-\dfrac{(x-x')^2}{4\kappa t}\right]dx'$。

350．用 342 题方法求三维无界空间波动方程和热传导方程的 Green 函数。

波动方程：$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\nabla^2\right)G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$。

对变量 $\boldsymbol{r}$ 和 t 作 Fourier 变换得

$\left(-\omega^2 + a^2 k^2\right)\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega;\boldsymbol{r}',t') = \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\exp(-i\omega t')$，

即 $\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega;\boldsymbol{r}',t') = \dfrac{\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\exp(-i\omega t')}{a^2 k^2 - \omega^2}$，

反演得 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \dfrac{1}{(2\pi)^4 a^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}d\omega\iiint\dfrac{\exp\left[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right]}{k^2 - \left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}d\boldsymbol{k}$，同 342 题，记

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，$\tau = t-t'$，以 $\boldsymbol{R}$ 方向为 z 方向在 $\boldsymbol{k}$ 空间建立球坐标系，有

$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \dfrac{1}{(2\pi)^3 a^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}d\omega\int_0^{\infty}\dfrac{k^2\,dk}{k^2 - \left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}\int_0^{\pi} e^{ikR\cos\theta}\sin\theta\,d\theta$

$= \dfrac{1}{(2\pi)^3 a^2 iR}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}d\omega\int_0^{\infty}\dfrac{k\left(e^{ikR}-e^{ikR}\right)dk}{k^2 - \left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2} = \dfrac{1}{(2\pi)^3 a^2 iR}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}d\omega\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{k e^{ikR}\,dk}{k^2 - \left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{(2\pi)^3 a^2 iR}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}d\omega\lim_{\eta\to 0^+}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{k e^{ikR}\,dk}{k^2 - \left(\dfrac{\omega}{a}-i\eta\right)^2}$。

由留数定理，$\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{k e^{ikR}\,dk}{k^2 - \left(\dfrac{\omega}{a}-i\eta\right)^2} = 2\pi i\,\text{res}\left[\dfrac{z e^{iRz}}{z^2 - \left(\dfrac{\omega}{a}-i\eta\right)^2}\right]_{z=-\frac{\omega}{a}+i\eta} = \pi i e^{-R\eta}e^{-i\frac{\omega}{a}R}$，

所以 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \dfrac{1}{4\pi a^2 R}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\tau-\frac{R}{a}\right)}d\omega = \dfrac{1}{4\pi a^2 R}\delta\left(\tau-\dfrac{R}{a}\right)$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{a}\right)。$$

热传导方程：$\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \kappa\nabla^2\right)G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(t - t')$。

对变量 $\boldsymbol{r}$ 作 Fourier 变换，对变量 t 作 Laplace 变换得

$$\left(p + \kappa k^2\right)\tilde{G}(\boldsymbol{k}, p; \boldsymbol{r}', t') = \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\exp(-pt')，\text{ 限定 } |\arg p| < \frac{\pi}{2}。$$

即 $\tilde{G}(\boldsymbol{k}, p; \boldsymbol{r}', t') = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\exp(-pt')}{k^2 + \dfrac{p}{\kappa}}$，作 Fourier 反演得

$$\tilde{G}(\boldsymbol{r}, p; \boldsymbol{r}', t') = \frac{e^{-pt'}}{\kappa}\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\frac{\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})}{k^2 + \dfrac{p}{\kappa}}d\boldsymbol{k} = \frac{e^{-pt'}}{4\pi^2 i\kappa R}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k e^{ikR}}{k^2 + \dfrac{p}{\kappa}}dk。$$

由留数定理，由于 $|\arg p| < \dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{3\pi}{4} < \arg i\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}} < \dfrac{\pi}{4}$，$-\dfrac{3\pi}{4} < \arg\left(-i\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}\right) < -\dfrac{\pi}{4}$，即

$i\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}$ 位于上半平面，$-i\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}$ 位于下半平面，

所以 $\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k e^{ikR}}{k^2 + \dfrac{p}{\kappa}}dk = 2\pi i\,\text{res}\left(\frac{z e^{izR}}{z^2 + \dfrac{p}{\kappa}}\right)_{z=\sqrt{\frac{p}{\kappa}}i} = \pi i e^{-R\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}$，

因此 $\tilde{G}(\boldsymbol{r}, p; \boldsymbol{r}', t') = \dfrac{e^{-pt'}}{4\pi\kappa R}e^{-R\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}$。

书中已求得 $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-x^2}dx \xrightarrow{LT} \frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$，

所以 $e^{-\alpha\sqrt{p}} \xrightarrow{LT^{-1}} \dfrac{d}{dt}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-x^2}dx = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$，

再利用 Laplace 变换性质 $f(at) \xrightarrow{LT} \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$ 可得

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t') = \frac{1}{8\left[\pi\kappa(t - t')\right]^{3/2}}e^{-\frac{R^2}{4\kappa(t-t')}}\eta(t - t')。$$

351. 用 Laplace 变换求解半无界问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, x>0, t>0 \\ u\big|_{x=0}=u_0, u\big|_{t=0}=0\end{cases}$。

对变量 t 作 Laplace 变换得 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}-\dfrac{p}{\kappa}U(x,p)=0, x>0 \\ U(x,p)\big|_{x=0}=\dfrac{u_0}{p}\end{cases}$，

解得 $U(x,p)=\dfrac{u_0}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}$。由于 $\mathrm{erfc}\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$，令 $\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{\kappa}}$ 即可得

$$u(x,t)=u_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)。$$

352. 一高为 d，底面积为 S 的圆柱体，侧面绝热，单位时间内通过下底供给热量 H，而上底保持温度为 0。设柱体初温为 0，证明在 t 时刻单位时间内通过上底流出的热量为

$$Q=H\left[1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2d}\pi\right)^2\kappa t}\right]，\text{其中 }\kappa\text{ 为扩散率。}$$

以底面圆心为坐标原点，圆柱轴线为 z 轴建立柱坐标系，温度分布与 ρ,φ 无关，底面热流

密度 $\dfrac{H}{S}=-k\dfrac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{\partial u(z,t)}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=0 \\ \dfrac{\partial u(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-\dfrac{H}{kS}, u(z,t)\big|_{z=d}=0, u(z,t)\big|_{t=0}=0\end{cases}$。

对变量 t 作 Laplace 变换得 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(z,p)}{\partial z^2}-\dfrac{p}{\kappa}U(z,p)=0 \\ \dfrac{\partial U(z,p)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-\dfrac{H}{kS}\dfrac{1}{p}, U(z,p)\big|_{z=d}=0\end{cases}$，

解得 $U(z,p)=\dfrac{H}{kS}\dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(d-z)}{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\kappa}}d}\dfrac{1}{p}\sqrt{\dfrac{\kappa}{p}}$ 没，则 $-k\dfrac{\partial U(z,p)}{\partial z}\bigg|_{z=d}=\dfrac{H}{S}\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\kappa}}d}$。

令习题 09 第 177（4）题中 $x=l=\dfrac{d}{\sqrt{\kappa}}$ 可求得上式反演

$$-k\dfrac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=d}=\dfrac{H}{S}\left[1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2d}\pi\right)^2\kappa t}\right]，\text{该式就是上底热流密度}\dfrac{Q}{S}，\text{即}$$

$$Q = H\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2d}\pi\right)^2\kappa t}\right]。$$

353. 设有两条半无界杆，温度分别为 0 和 u_0。在 $t=0$ 时将两杆端点相接，求 $t>0$ 时杆中

温度分布：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\\[2mm] u\big|_{t=0} = u_0\eta(x)\end{cases}$。

对变量 t 作 Laplace 变换得 $\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - \dfrac{p}{\kappa}U(x,p) = -\dfrac{u_0}{\kappa}\eta(x)$， （＊）

即 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - \dfrac{p}{\kappa}U(x,p) = 0, x<0\\[2mm] U\big|_{x\to-\infty} \text{有界}\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - \dfrac{p}{\kappa}U(x,p) = -\dfrac{u_0}{\kappa}, x>0\\[2mm] U\big|_{x\to\infty} \text{有界}\end{cases}$，

解为 $U(x,p) = \begin{cases}Ae^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, x<0\\[3mm] Be^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x} + \dfrac{u_0}{p}, x>0\end{cases}$。

由方程（＊）可看出 $U(x,p)$ 和 $\dfrac{\partial U(x,p)}{\partial x}$ 在 $x=0$ 连续，否则方程右边会出现冲激或冲激偶。

由此可得 $U(x,p) = \begin{cases}\dfrac{u_0}{2}\dfrac{1}{p}e^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, x<0\\[3mm] \dfrac{u_0}{p} - \dfrac{u_0}{2}\dfrac{1}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, x>0\end{cases}$。

反演得 $u(x,t) = \begin{cases}\dfrac{u_0}{2}\text{erfc}\left(-\dfrac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), x<0\\[3mm] u_0 - \dfrac{u_0}{2}\text{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), x>0\end{cases}$。

354. 用 Laplace 变换解习题 12 第 236 题：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\\[2mm] u\big|_{x=0} = Ae^{-\alpha^2\kappa t}, u\big|_{x=l} = Be^{-\beta^2\kappa t}, u\big|_{t=0} = 0\end{cases}$。

对变量 t 作 Laplace 变换得
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - \dfrac{p}{\kappa}U(x,p) = 0 \\ U\big|_{x=0} = \dfrac{A}{p+\alpha^2\kappa}, \quad U\big|_{x=l} = \dfrac{B}{p+\beta^2\kappa} \end{cases}$$ 。

解得 $U(x,p) = \dfrac{A}{p+\alpha^2\kappa} \cdot \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}\,l} + \dfrac{B}{p+\beta^2\kappa} \cdot \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}\,l}$ 。 （＊）

下面求 $F(p) = \dfrac{1}{p-c} \dfrac{\operatorname{sh} a\sqrt{p}}{\operatorname{sh} b\sqrt{p}}$ （$b > a > 0$，$c \neq 0$）的反演：

$F(p)$ 的一阶极点：$p = c$，$p = -\left(\dfrac{k\pi}{b}\right)^2$，$k = 1,2,\cdots$ 。

$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=c} = \dfrac{\operatorname{sh} a\sqrt{c}}{\operatorname{sh} b\sqrt{c}} e^{ct}$，$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2} = \dfrac{(-1)^k 2k\pi}{k^2\pi^2 + cb^2} \sin\dfrac{k\pi a}{b} e^{-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 t}$ 。

取如下积分路径：其中 C_n 半径为 $-\left(\dfrac{n+1/2}{b}\pi\right)^2$，该取法的讨论类似习题 09 第 177（4）题。
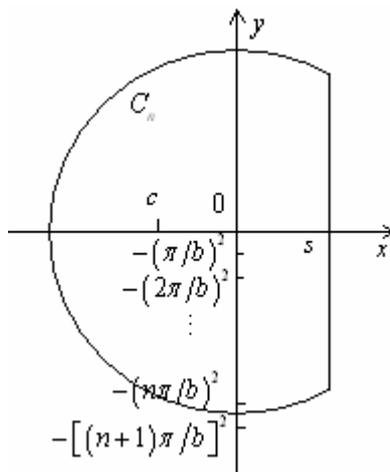
令 $n \to \infty$ 可得 $\dfrac{1}{p-c} \dfrac{\operatorname{sh} a\sqrt{p}}{\operatorname{sh} b\sqrt{p}} \xrightarrow{LT^{-1}} \dfrac{\operatorname{sh} a\sqrt{c}}{\operatorname{sh} b\sqrt{c}} e^{ct} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k 2k\pi}{k^2\pi^2 + cb^2} \sin\dfrac{k\pi a}{b} \exp\left[-\left(\dfrac{k\pi}{b}\right)^2 t\right]$ 。

所以（＊）式的反演为 $u(x,t) = A\dfrac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l} e^{-\alpha^2\kappa t} + B\dfrac{\sin\beta x}{\sin\beta l} e^{-\beta^2\kappa t}$

$+ \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi\left[\dfrac{A}{\alpha^2 l^2 - n^2\pi^2} - \dfrac{(-1)^n B}{\beta^2 l^2 - n^2\pi^2}\right]\sin\dfrac{n\pi x}{l}\exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2\kappa t\right]$ 。

355．用 Fourier 变换法解无界弦的振动问题：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0 \exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right], \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \end{cases}$。

对变量 x 作 Fourier 变换得 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(k,t)}{\partial t^2} + k^2 c^2 U(k,t) = 0 \\ U\big|_{t=0} = u_0 FT\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]\right\}, \dfrac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \end{cases}$，

解得 $U(k,t) = u_0 FT\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]\right\}\cos kct = \dfrac{u_0}{2} FT\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]\right\}\left(e^{ikct} + e^{-ikct}\right)$，

反演得 $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2}\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{x+ct}{a}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\dfrac{x-ct}{a}\right)^2\right]\right\}$。

356. 用 Fourier 变换和 Laplace 变换解无界弦的横振动问题：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$。

对变量 x 作 Fourier 变换得 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}(k,t)}{\partial t^2} + k^2 c^2 \tilde{u}(k,t) = 0 \\ \tilde{u}\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(k), \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \tilde{\psi}(k) \end{cases}$，再对变量 t 作 Laplace 变换得

$$U(k,p) = \dfrac{p\tilde{\varphi}(k) + \tilde{\psi}(k)}{p^2 + k^2 c^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\tilde{\varphi}(k) - \dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}}{p + ikc} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\tilde{\varphi}(k) + \dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}}{p - ikc},$$

作 Laplace 反演得 $\tilde{u}(k,t) = \dfrac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(k) - \dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}\right]e^{-ikct} + \dfrac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(k) + \dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}\right]e^{ikct}$

$$= \dfrac{1}{2}\tilde{\varphi}(k)\left(e^{-ikct} + e^{ikct}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}\left(e^{ikct} - e^{-ikct}\right)。$$

再作 Fourier 反演得

$$u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right] + \dfrac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x}\left[\psi(\xi+ct) - \psi(\xi-ct)\right]d\xi$$

$$= \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right] + \dfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi。$$

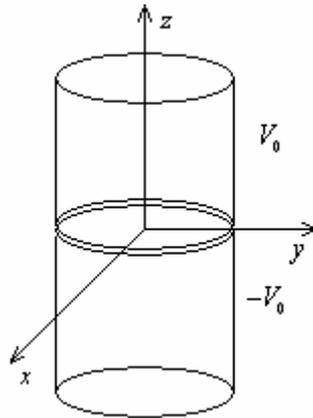357．一半无界弦 $x \geq 0$ ，原处于平衡状态。设在 $t > 0$ 时 $x = 0$ 端作微小振动 $A\sin\omega t$ 。试

求弦上各点运动：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{x=0} = A\sin\omega t\,\eta(t), u|_{t=0} = 0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$。

对变量 t 作 Laplace 变换得 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - \left(\dfrac{p}{c}\right)^2 U(x,p) = 0 \\ U(x,p)|_{x=0} = \dfrac{A\omega}{p^2 + \omega^2}, U(x,p)|_{x\to\infty} \text{ 有界} \end{cases}$。

解得 $U(x,p) = \dfrac{A\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-\frac{p}{c}x}$ ，反演得 $u(x,t) = A\sin\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\eta\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$ 。

358．电子光学中常遇到一种简单的静电透镜—等径双筒镜，它的两极是由两个无限接近的等径同轴长圆筒组成，其电势分别为 $-V_0$ 与 V_0（见下图）。求筒内静电势。

先令边界条件为 $u|_{\rho=a} = V_0 e^{-k|z|} \operatorname{sgn} z$ ，该问题显然与 φ 无关，

即 $\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\dfrac{\partial u(\rho,z)}{\partial\rho}\right] + \dfrac{\partial^2 u(\rho,z)}{\partial z^2} = 0 \\ u|_{\rho=0} \text{ 有界}, u|_{\rho=a} = V_0 e^{-k|z|}\operatorname{sgn} z \end{cases}$。对变量 z 作 Fourier 变换得

$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\dfrac{\partial U(\rho,\omega)}{\partial\rho}\right] - \omega^2 U(\rho,\omega) = 0 \\ U|_{\rho=0} \text{ 有界}, U|_{\rho=a} = -2iV_0\dfrac{\omega}{k^2+\omega^2} \end{cases}$。这是零阶虚宗量 Bessel 方程，有界解为

$U(\rho,\omega) = AI_0(\omega\rho)$ ，由边界条件得 $U(\rho,\omega) = -2iV_0\dfrac{\omega}{k^2+\omega^2}\dfrac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)}$ 。

反演得 $u(\rho, z) = -\dfrac{V_0}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\omega}{k^2 + \omega^2} \dfrac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)} i e^{i\omega z} d\omega$

$$= -\dfrac{V_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\omega}{k^2 + \omega^2} \dfrac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)} (i\cos\omega z - \sin\omega z) d\omega \text{。}$$

上面的积分理解为主值，由于 $\dfrac{\omega}{k^2 + \omega^2} \dfrac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)}\cos\omega z$ 是 ω 的奇函数，所以这部分积分为 0，

即 $u(\rho, z) = \dfrac{2V_0}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\infty} \dfrac{\omega}{k^2 + \omega^2} \dfrac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)} \sin\omega z d\omega$ ，

令 $k \to 0$ 得 $u(\rho, z) = \dfrac{2V_0}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\infty} \dfrac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)} \dfrac{\sin\omega z}{\omega} d\omega$ 。

359．设有一半径为 1 的带电圆盘，圆盘上电势为 V_0，求空间电势。

以圆盘圆心为原点，垂直于盘面的轴为 z 轴建立柱坐标系。该问题与 φ 无关，且显然关于

$z = 0$ 面是对称的，即 u 是 z 的偶函数，必有 $\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$（$\rho > 1$），可以只考虑半空间 $z > 0$。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\dfrac{\partial u(\rho, z)}{\partial\rho}\right] + \dfrac{\partial^2 u(\rho, z)}{\partial z^2} = 0 \\[3mm] u\big|_{z=0, 0<\rho<1} = V_0, \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0, \rho>1} = 0, u\big|_{z\to\infty} = 0 \text{。} \\[3mm] u\big|_{\rho=0} \text{有界}, u\big|_{\rho\to\infty} = 0 \end{cases}$$

对变量 ρ 作 Hankel 变换：$U(k, z) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} u(\rho, z) J_0(k\rho)\rho d\rho$ ，则

$$\int_{0}^{\infty} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\dfrac{\partial u(\rho, z)}{\partial\rho}\right] J_0(k\rho)\rho d\rho = \rho\dfrac{\partial u(\rho, z)}{\partial\rho} J_0(k\rho)\Big|_{\rho=0}^{\rho\to\infty} - \int_{0}^{\infty} \rho\dfrac{\partial u(\rho, z)}{\partial\rho}\dfrac{dJ_0(k\rho)}{d\rho} d\rho$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \dfrac{\partial u(\rho, z)}{\partial\rho}\rho\dfrac{dJ_0(k\rho)}{d\rho} d\rho = -u(\rho, z)\rho\dfrac{dJ_0(k\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=0}^{\rho\to\infty} + \int_{0}^{\infty} u(\rho, z)\dfrac{d}{d\rho}\left[\rho\dfrac{dJ_0(k\rho)}{d\rho}\right] d\rho$$

$$= -k^2\int_{0}^{\infty} u(\rho, z) J_0(k\rho)\rho d\rho = -k^2 U(k, z) \text{。}$$

即原方程变换为 $\dfrac{\partial^2 U(k, z)}{\partial z^2} - k^2 U(k, z) = 0$ ，由有界条件可得 $U(k, z) = A(k)e^{-kz}$ 。

反演得 $u(\rho,z) = \int_0^\infty A(k)e^{-kz}J_0(k\rho)kdk$，代入 z 的边界条件得到积分方程：

$$\int_0^\infty A(k)J_0(k\rho)kdk = V_0 \text{（} 0 < \rho < 1 \text{），}$$

$$\int_0^\infty A(k)J_0(k\rho)k^2dk = 0 \text{（} \rho > 1 \text{）。}$$

由习题 16 第 319 题结果可知 $A(k) = \dfrac{2V_0}{\pi}\dfrac{\sin k}{k^2}$，即

$$u(\rho,z) = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-kz}J_0(k\rho)\frac{\sin k}{k}dk。$$

360. 由柱面坐标 (ρ,z) 可以定义扁球面坐标 (μ,ξ)：$z = \mu\xi$，$\rho = \sqrt{(1-\mu^2)(1+\xi^2)}$。

（1）证明：在此坐标系下，上题化为
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial u}{\partial\mu}\right] + \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right] = 0 \\ u\big|_{\xi=0} = V_0, u\big|_{\xi\to\infty} \to 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial\mu}\bigg|_{\mu=0} = 0, u\big|_{\mu=1} \text{ 有界} \end{cases}$$

（2）求出 $u(\mu,\xi)$。

（1）该坐标系下的 Laplace 算符为 $\nabla^2 = \dfrac{1}{\mu^2+\xi^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial}{\partial\mu}\right] + \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right]\right\}$。

对于 $z > 0$ 半空间，(μ,ξ) 取值范围：$0 < \mu < 1$，$\xi > 0$。

$z = 0, 0 < \rho < 1$ 对应 $\xi = 0$，所以 $u\big|_{z=0,0<\rho<1} = u\big|_{\xi=0} = V_0$。

由坐标关系可得 $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\xi\dfrac{1-\mu^2}{1+\xi^2}\dfrac{\partial}{\partial\mu} + \mu\dfrac{\partial}{\partial\xi}}{\xi^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\xi^2} + \mu^2}$，$z = 0, \rho > 1$ 对应 $\mu = 0$，

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0,\rho>1} = \dfrac{\xi\dfrac{1-\mu^2}{1+\xi^2}\dfrac{\partial u}{\partial\mu} + \mu\dfrac{\partial u}{\partial\xi}}{\xi^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\xi^2} + \mu^2}\Bigg|_{\mu=0} = \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\mu}\bigg|_{\mu=0} = 0$。

$z \to \infty$ 和 $\rho \to \infty$ 对应 $\xi \to \infty$，所以 $u\big|_{\rho\to\infty} = u\big|_{z\to\infty} = u\big|_{\xi\to\infty} \to 0$。

$\rho = 0$ 对应 $\mu = 1$，所以 $u\big|_{\rho=0} = u\big|_{\mu=1}$ 有界。

（2）令 $u(\mu, \xi) = \mathrm{M}(\mu) \Xi(\xi)$，分离变量得 $\begin{cases} \dfrac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right] + \lambda \mathrm{M} = 0 \\ \dfrac{d}{d\xi}\left[\left(1+\xi^2\right)\dfrac{d\Xi}{d\xi}\right] - \lambda \Xi = 0 \end{cases}$。

可得本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\dfrac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mu}\right] + \lambda \mathrm{M} = 0 \\ \mathrm{M}'(0) = 0, \mathrm{M}(1)\text{有界} \end{cases}$，习题 15 第 292（2）题已得该问题的解为

$\lambda_l = 2l(2l+1)$，$\mathrm{M}_l(\mu) = P_{2l}(\mu)$。

$\Xi(\xi)$ 方程为 $\dfrac{d}{d\xi}\left[\left(1+\xi^2\right)\dfrac{d\Xi(\xi)}{d\xi}\right] - 2l(2l+1)\Xi(\xi) = 0$。 $\qquad$ （*）

将 ξ 换成 $i\xi$ 得 $\dfrac{d}{d\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\dfrac{d\Xi(i\xi)}{d\xi}\right] + 2l(2l+1)\Xi(i\xi) = 0$，所以通解为

$\Xi_l(\xi) = A_l P_{2l}(i\xi) + B_l Q_{2l}(i\xi)$。由于 $\Xi(\xi)\big|_{\xi\to\infty} = 0$，而当 $l \neq 0$ 时 $P_{2l}(\infty)$ 和 $Q_{2l}(\infty)$ 都无

界，所以只有 $l = 0$。此时解方程（*）可得 $\Xi_0(\xi) = A\arctan\xi + B$，

所以 $u(\mu, \xi) = \mathrm{M}_0(\mu)\Xi_0(\xi) = A\arctan\xi + B$，

由边界条件 $u\big|_{\xi=0} = V_0, u\big|_{\xi\to\infty} \to 0$ 得 $A = -\dfrac{2}{\pi}V_0, B = V_0$，

所以 $u(\mu, \xi) = V_0\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\arctan\xi\right) = \dfrac{2V_0}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\xi\right) = \dfrac{2V_0}{\pi}\operatorname{arccot}\xi$。

361．$\zeta = z^2$ 把 z 平面上的下列区域变为 ζ 平面上的什么区域？（1）上半平面；（2）上半圆 $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$；（3）圆 $|z| < 1$；（4）双纽线内部 $|z|^2 < \cos(2\arg z)$。

（1）$0 < \arg z < \pi$，$0 < \arg \zeta = 2\arg z < 2\pi$，所以是沿正实轴割开的全平面。

（2）$0 < \arg z < \pi$，$0 < \arg \zeta = 2\arg z < 2\pi$，$|\zeta| = |z|^2 < 1$，所以是沿正实轴割开的单位圆内部。

（3）$|\zeta| = |z|^2 < 1$，所以是单位圆内部。

（4）设 $z = \rho e^{i\varphi}, \zeta = r e^{i\theta}$，则由 $\zeta = z^2$ 可得 $r = \rho^2, \theta = 2\varphi$。由于 $\rho^2 < \cos 2\varphi$，所以 $r < \cos\theta$，即为圆内部 $\left| \zeta - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{2}$。

362．若在分式线性变换 $\zeta = \lambda \dfrac{z - \mu}{z - \nu}$ 下，z_1, z_2, z_3 各点分别变为 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 各点，试证：

$$\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} \bigg/ \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \bigg/ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} 。$$

变换写成 $\zeta = \lambda + \dfrac{\lambda(\nu - \mu)}{z - \nu}$，记 $(z, z_1, z_2, z_3) = \dfrac{z - z_1}{z - z_2} \bigg/ \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$，只需证明该值在平移，反演，旋转，伸缩下不变即可。平移，旋转，伸缩变换易证，而 $\left(\dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{z_1}, \dfrac{1}{z_2}, \dfrac{1}{z_3} \right) = \dfrac{\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z_1}}{\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z_2}} \dfrac{\dfrac{1}{z_3} - \dfrac{1}{z_2}}{\dfrac{1}{z_3} - \dfrac{1}{z_1}}$

$= \dfrac{z_1 z_2 - z z_2}{z_1 z_2 - z z_1} \dfrac{z_1 z_2 - z_1 z_3}{z_1 z_2 - z_3 z_2} = \dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = (z, z_1, z_2, z_3)$，即该值在反演变换下也不变，所以该值在分式线性变换不变。

363．求一变换，把上半平面变为单位圆，并把实轴上的点 $-1, 0, 1$ 分别变为单位圆上的 $1, i, -1$。

设 $\zeta = \lambda \dfrac{z - \mu}{z - \nu}$，将 (z, ζ) 分别代入 $(-1, 1)$，$(0, i)$，$(1, -1)$ 得到三个方程解出 $\zeta = -i \dfrac{z - i}{z + i}$。

364．z 平面上的单位圆 $|z|<1$，沿正实轴割开，试把此区域变为 ζ 平面上的上半平面。
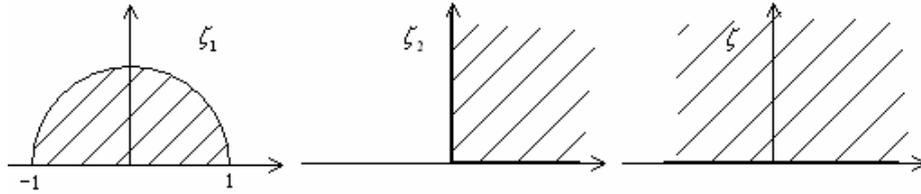
变换 $\zeta_1 = \sqrt{z}$ 将单位圆内变换为上半单位圆内。

令 $\zeta_2 = -\dfrac{\zeta_1+1}{\zeta_1-1}$，可看出该变换将 -1 变换为 0，1 变换为 ∞，所以 ζ_1 平面实轴上从-1 到 1

的线段和上半圆弧都变换为 ζ_2 平面上经过原点和 ∞ 的直线，由于 0 变换为 1，所以-1 到 1

的线段变换为正实轴，线段与上半圆弧在-1 处的夹角为 $\pi/2$，由保角性，上半圆弧变换为

正虚轴，即变换为第一象限。

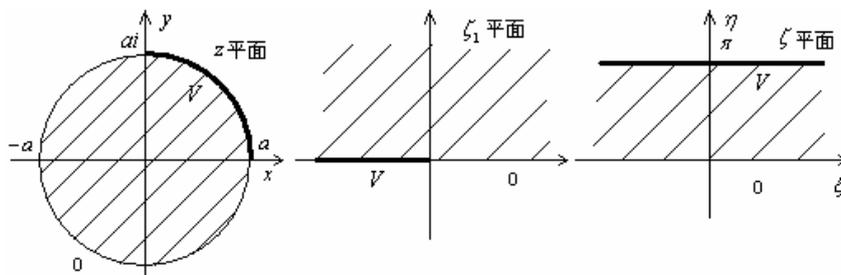令 $\zeta = \zeta_2^2$，则变换为上半平面，综上该变换为 $\zeta = \left(\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$。

365．求一变换，把第一象限变为单位圆内。

先由变换 $\zeta_1 = z^2$ 将它变换为上半平面。令 $\zeta = e^{i\zeta_1} = e^{-y}e^{ix}$，其中 $\zeta_1 = x+iy$，由于 $y>0$，

所以 $|\zeta| = e^{-y} < 1$，即变为单位圆内。综上 $\zeta = \exp\left(iz^2\right)$。

366．一半径为 a 的无穷长导体柱面，第一象限的电势为 V，第三象限电势 $-V$，第二，四象限接地，求导体内电势。

将 u 分成两部分：$u = u_1 + u_2$，其中 u_1 在第一象限为 V，其余象限为 0，u_2 在第三象限为 $-V$，

其余象限为 0。先求 u_1：

$\zeta_1 = \lambda \dfrac{z-a}{z-ai}$，使 z 平面上的 a 和 ai 分别对应 ζ_1 平面上的 0 和 ∞，即 z 平面上圆映射为 ζ_1

平面上通过原点的直线，该直线原点一侧对应 z 平面上第一象限圆弧，原点另一侧对应二，三，四象限的圆弧。由于 $z = -a$ 时 $\zeta_1 = \dfrac{2\lambda}{1+i}$，令 $\lambda = 1+i$ 可使 $-a$ 映射为 2，即二，三，四象限的圆弧映射为正实轴，那么第一象限的圆弧即映射为负实轴。

$\zeta = \ln \zeta_1$（$\zeta = \xi + i\eta$）将 ζ_1 平面正实轴映射为 $\eta = 0$，负实轴映射为 $\eta = \pi$，ζ_1 平面的上半平面变为 ζ 平面上 $\eta = 0$ 和 $\eta = \pi$ 之间的带状区域，综上 $\zeta = \ln\left[(1+i)\dfrac{z-a}{z-ai}\right]$。

ζ 平面上 u_1 显然与 ξ 无关，所以 $\dfrac{d^2\zeta}{d\eta^2} = 0$，通解为 $u_1 = A\eta + B$，由边界条件定出 $u_1 = \dfrac{V}{\pi}\eta$。

由 $\zeta = \ln\left[(1+i)\dfrac{z-a}{z-ai}\right]$ 可知 $\eta = \arg\left[(1+i)\dfrac{z-a}{z-ai}\right] = \dfrac{\pi}{4} + \arg\left(\rho e^{i\varphi} - a\right) - \arg\left(\rho e^{i\varphi} - ai\right)$

$= \dfrac{\pi}{4} + \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - a} - \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi - a}{\rho\cos\varphi}$，

即 $u_1(\rho, \varphi) = \dfrac{V}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{4} + \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - a} - \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi - a}{\rho\cos\varphi}\right)$。

显然 $u_2(\rho, \varphi) = -u_1(\rho, \varphi - \pi) = -\dfrac{V}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{4} + \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi + a} - \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi + a}{\rho\cos\varphi}\right)$

所以 $u = u_1 + u_2 = \dfrac{V}{\pi}\left(\tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - a} - \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi + a}\right.$

$\left. + \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi + a}{\rho\cos\varphi} - \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi - a}{\rho\cos\varphi}\right)$

$= \dfrac{V}{\pi}\left(\tan^{-1}\dfrac{\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - a} - \dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi + a}}{1 + \dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - a}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi + a}} + \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{\rho\sin\varphi + a}{\rho\cos\varphi} - \dfrac{\rho\sin\varphi - a}{\rho\cos\varphi}}{1 + \dfrac{\rho\sin\varphi + a}{\rho\cos\varphi}\dfrac{\rho\sin\varphi - a}{\rho\cos\varphi}}\right)$

$= \dfrac{V}{\pi}\left(\tan^{-1}\dfrac{2a\rho\sin\varphi}{\rho^2 - a^2} + \tan^{-1}\dfrac{2a\rho\cos\varphi}{\rho^2 - a^2}\right)$。

367. 实轴上 $(0, a)$ 段电势为 V，实轴上 $x > a$ 段及正虚轴电势均为 0，求第一象限电势分布。
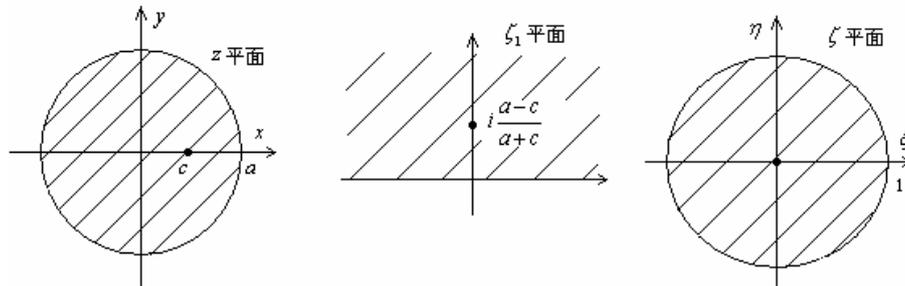
$\zeta_1 = z^2$ 将第一象限变为上半平面，a 点变为 a^2。
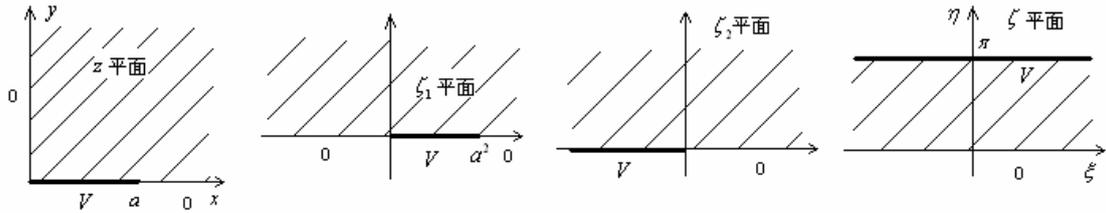
$\zeta_2 = \dfrac{\zeta_1 - a^2}{\zeta_1}$ 将 a^2 变为 0，0 变为 ∞，所以 ζ_1 平面的实轴变为 ζ_2 平面过原点的直线，$a^2 + 1$

变为 $\dfrac{1}{a^2 + 1} > 0$，所以 ζ_1 平面实轴上 a^2 右边部分和负实轴变为 ζ_2 平面的正实轴，电势为 V 的部分变为负实轴。

$\zeta = \ln \zeta_2$ 将负实轴变为 $\eta = \pi$，正实轴变为 $\eta = 0$，上半平面变为带状区域 $\eta = 0$ 和 $\eta = \pi$ 之间。综上 $\zeta = \ln \dfrac{z^2 - a^2}{z^2}$，所以 $u = \dfrac{V}{\pi} \eta = \dfrac{V}{\pi} \arg \dfrac{z^2 - a^2}{z^2}$。

368．在接地的无穷长金属柱内，有一条平行于柱轴的均匀带电丝，线电荷密度为 σ。设圆柱的半径为 a，带电丝与柱轴距离为 c。求柱内电势。

$\zeta_1 = -i \dfrac{z - a}{z + a}$ 将圆内变为上半平面，c 点变为 $i \dfrac{a - c}{a + c}$，

$\zeta = \dfrac{\zeta_1 - i \dfrac{a - c}{a + c}}{\zeta_1 + i \dfrac{a - c}{a + c}}$ 将上半平面变成单位圆内，$i \dfrac{a - c}{a + c}$ 变为原点。$\zeta = \dfrac{a(z - c)}{cz - a^2}$。

$u = \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{1}{|\zeta|} = \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left| \dfrac{cz - a^2}{a(z - c)} \right|$。

369．地面上平挂着一无穷长导体圆柱，圆柱的半径为 a，柱轴距地面 h（$h > a$）。设圆柱面的电势为 V，求圆柱外电势。

设 $\pm bi$（$b > 0$）是圆柱的反演点对（当然也是地面的反演点对），则可求出 $b = \sqrt{h^2 - a^2}$。

$\zeta = \dfrac{z+bi}{z-bi}$ 将 $-bi$ 变为 0，bi 变为无穷大，由于反演点对的不变性，地面和圆柱都映射为以原点为圆心的圆。
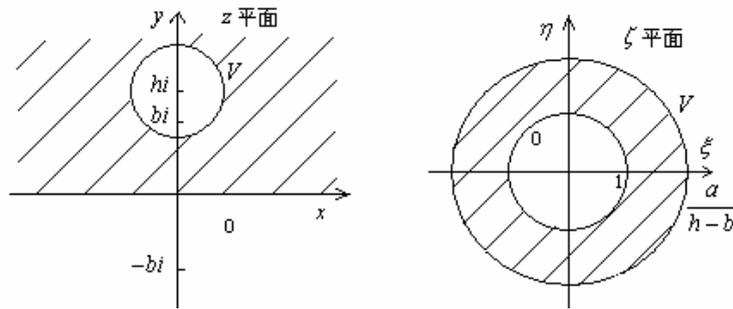
由于 $\left| \dfrac{x+bi}{x-bi} \right| = 1$，所以地面映射成的圆半径为 1，又 $\dfrac{(h+a)i+bi}{(h+a)i-bi} = \dfrac{a}{h-b}$，即 $(h+a)i$ 映射

为 $\dfrac{a}{h-b}$，所以圆柱映射成的圆半径为 $\dfrac{a}{h-b}$。$u = V \dfrac{\ln|\zeta|}{\ln \dfrac{a}{h-b}} = V \dfrac{\ln \left| \dfrac{z+bi}{z-bi} \right|}{\ln \dfrac{a}{h-b}}$。

370．证明：儒可夫斯基变换 $z = \dfrac{a}{2}\left(\zeta + \dfrac{1}{\zeta}\right)$ 把 z 平面上以 $z = \pm a$ 为焦点的共焦椭圆变为 ζ

平面上的同心圆。

记 $z = x + iy$，$\zeta = \rho e^{i\varphi}$，则 $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)\cos\varphi \\[2mm] y = \dfrac{a}{2}\left(\rho - \dfrac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \end{cases}$，对于 ζ 平面上的圆 $\rho = \rho_0$，对应

$\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$，其中半长轴 $A = \dfrac{a}{2}\left(\rho_0 + \dfrac{1}{\rho_0}\right)$，半短轴 $B = \dfrac{a}{2}\left(\rho_0 - \dfrac{1}{\rho_0}\right)$，

焦距 $C = \sqrt{A^2 + B^2} = a$，即 ζ 平面上的同心圆映射为 z 平面上以 $z = \pm a$ 为焦点的共焦椭圆，反之亦然。

371. 讨论下列方程的类型，并将他们化为典则形式：

（1） $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$；

（2） $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$；

（3） $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$；

（4） $\left(1+x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1+y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$；

（5） $\tan^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\tan x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$。

（1） $a=1, b=1, c=-3, d=2, e=6, f=g=0$，$b^2-ac=4>0$，所以是双曲型方程。

特征线方程为 $\dfrac{dy}{dx}=3$ 和 $\dfrac{dy}{dx}=-1$，特征线为 $y-3x=C_1$ 和 $y+x=C_2$，所以可令

$\xi = y-3x$，$\eta = y+x$，则变换后方程系数 $A=C=0, B=-8, D=0, E=8, F=G=0$，

即原方程化为 $-16\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta} + 8\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = 0$，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = 0$。

令 $\alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2} = y-x, \beta = \dfrac{\eta-\xi}{2} = 2x$，则 $\dfrac{\partial}{\partial\xi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial}{\partial\beta}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial}{\partial\beta}\right)$，

所以，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial}{\partial\beta}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right)$，方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = 0$ 化为

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} - \dfrac{\partial u}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial u}{\partial\beta} = 0$。

（2） $a=1, b=2, c=5, d=1, e=2, f=g=0$，$b^2-ac=-1<0$，所以是椭圆型方程。

特征线方程 $\dfrac{dy}{dx} = 2\pm i$，特征线为 $y-\left(2+i\right)x=C_1$ 和 $y-\left(2-i\right)x=C_2$，令

$\xi = y-\left(2+i\right)x$，$\eta = y-\left(2-i\right)x$，则原方程化为 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - i\dfrac{\partial u}{\partial\xi} + i\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = 0$，

令 $\rho = \dfrac{\xi+\eta}{2} = y-2x, \sigma = \dfrac{\eta-\xi}{2i} = x$，则方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2} + \dfrac{\partial u}{\partial\sigma} = 0$。

（3）$a=1, b=0, c=y, d=0, e=\dfrac{1}{2}, f=g=0$，$b^2-ac=-y$，

当 $y>0$ 时，方程是椭圆型，$y<0$ 时方程是双曲型。

$y<0$ 时，特征线方程 $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-y}$，特征线 $2\sqrt{-y}+x=C_1$ 和 $2\sqrt{-y}-x=C_2$，

令 $\xi=2\sqrt{-y}+x$，$\eta=2\sqrt{-y}-x$，则方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，

令 $\rho=\dfrac{\xi+\eta}{2}=2\sqrt{-y}, \sigma=\dfrac{\xi-\eta}{2}=x$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}=0$。

$y>0$ 时，特征线方程 $\dfrac{dy}{dx}=\pm i\sqrt{y}$，特征线 $2\sqrt{y}+ix=C_1$ 和 $2\sqrt{y}-ix=C_2$，

令 $\xi=2\sqrt{y}+ix$，$\eta=2\sqrt{y}-ix$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，

令 $\rho=\dfrac{\xi+\eta}{2}=2\sqrt{y}, \sigma=\dfrac{\xi-\eta}{2i}=x$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}=0$。

（4）$a=1+x^2, b=0, c=1+y^2, d=x, e=y, f=g=0$，$b^2-ac=-\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)<0$，

所以是椭圆型方程。特征线方程 $\dfrac{dy}{dx}=\pm i\sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}}$，特征线 $\text{sh}^{-1}y-i\,\text{sh}^{-1}x=C_1$ 和

$\text{sh}^{-1}y+i\,\text{sh}^{-1}x=C_2$，令 $\xi=\text{sh}^{-1}y-i\,\text{sh}^{-1}x$，$\eta=\text{sh}^{-1}y+i\,\text{sh}^{-1}x$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$。

令 $\rho=\dfrac{\xi+\eta}{2}=\text{sh}^{-1}y$，$\sigma=\dfrac{\eta-\xi}{2i}=\text{sh}^{-1}x$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}=0$。

（5）$a=\tan^2 x, b=-y\tan x, c=y^2, d=0, e=y, f=g=0$，$b^2-ac=0$，所以方程是抛

物型。特征线方程 $\dfrac{dy}{dx}=-y\cot x$，特征线 $y\sin x=C$。可令 $\xi=y\sin x, \eta=y\cos x$，变换

后方程系数 $A=B=0, C=\dfrac{y^2}{\cos^2 x}, D=-\dfrac{y\sin x}{\cos^2 x}, E=\dfrac{y}{\cos x}, F=G=0$，即方程化为

$\dfrac{y^2}{\cos^2 x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\dfrac{y\sin x}{\cos^2 x}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{y}{\cos x}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0$，即 $\left(\xi^2+\eta^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\xi\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\eta\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0$。

372. 有些方程经过适当的因数变换后可以消去一阶偏导数项。

（1）证明：在因变数变换 $u=\exp\left[-(ax+by)\right]v$ 下，方程 $\nabla^2 u+2a\dfrac{\partial u}{\partial x}+2b\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 化为

Helmholtz 方程 $\nabla^2 v-\left(a^2+b^2\right)v=0$，其中 a,b 为常数；

（2）寻求适当的变换，使方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2a\dfrac{\partial u}{\partial x}+2b\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 在变换后不再含有一阶偏导数项；

（3）设有方程 $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\dfrac{\partial u}{\partial x}+e\dfrac{\partial u}{\partial y}+fu=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，其中 a,b,c,d,e,f 为常

数。证明：只有在 $b^2-ac\neq 0$ 时可作变换 $u=\exp(\alpha x+\beta y+\gamma t)v$ 使 $v(x,y,t)$ 满足方程

$a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{\partial v}{\partial t}$。

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-ae^{-(ax+by)}v+e^{-(ax+by)}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-be^{-(ax+by)}v+e^{-(ax+by)}\dfrac{\partial v}{\partial y}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2 e^{-(ax+by)}v-2ae^{-(ax+by)}\dfrac{\partial v}{\partial x}+e^{-(ax+by)}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2 e^{-(ax+by)}v-2be^{-(ax+by)}\dfrac{\partial v}{\partial x}+e^{-(ax+by)}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$，代入原方程得

$\left(a^2+b^2\right)e^{-(ax+by)}v-2(a+b)e^{-(ax+by)}\dfrac{\partial v}{\partial x}+e^{-(ax+by)}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

$\qquad -2\left(a^2+b^2\right)e^{-(ax+by)}v+2(a+b)e^{-(ax+by)}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$

即 $\nabla^2 v-\left(a^2+b^2\right)v=0$。

（2）令 $u=v\exp(\alpha x+\beta y)$，则方程化为

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2(\alpha+a)\dfrac{\partial v}{\partial x}+2(b-\beta)\dfrac{\partial v}{\partial y}+\left(\alpha^2+2a\alpha-\beta^2+2b\beta\right)v=0$，

只需令 $\alpha=-a,\beta=b$，上面方程为 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(b^2-a^2\right)v=0$。

（3）将 $u=\exp(\alpha x+\beta y+\gamma t)v$ 代入原方程得

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(2a\alpha + 2b\beta + d\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(2b\alpha + 2c\beta + e\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+\left(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta - \gamma\right)v = \frac{\partial v}{\partial t}。$$

所以 $2a\alpha + 2b\beta + d = 0$，$2b\alpha + 2c\beta + e = 0$，$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta - \gamma = 0$，

前两式写成矩阵式 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{d}{2} \\ -\dfrac{e}{2} \end{pmatrix}$，要使其有解，必须有 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = b^2 - ac \neq 0$。

373. 求下列各偏微分方程通解：（1）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$；（2）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$；

（3）$\left(a^2 - b^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$，$a,b$ 为常数，$a \neq 0$；（4）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$。

（1）取试探解 $u = f\left(\alpha x + y\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 f''\left(\alpha x + y\right)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \alpha f''\left(\alpha x + y\right)$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''\left(\alpha x + y\right)$，代入方程得附加方程 $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$，解得 $\alpha_1 = -1$，$\alpha_2 = 3$，

所以通解为 $u = f_1\left(x - y\right) + f_2\left(3x + y\right)$。

（2）附加方程 $\alpha^2 - \alpha = 0$，解得 $\alpha_1 = 0$，$\alpha_2 = 1$，通解 $u = f_1\left(y\right) + f_2\left(x + y\right)$。

（3）附加方程 $\left(a^2 - b^2\right)\alpha^2 + 2b\alpha - 1 = 0$，解得 $\alpha_1 = \dfrac{1}{a+b}$，$\alpha_2 = -\dfrac{1}{a-b}$，通解

$u = f_1\left[x + \left(a + b\right)t\right] + f_2\left[x - \left(a - b\right)t\right]$。

（4）附加方程 $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0$，$\alpha = 1 \pm i$，$u = f_1\left[\left(1 + i\right)x + y\right] + f_2\left[\left(1 - i\right)x + t\right]$。

374. 求偏微分方程 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的通解。

令 $x = e^t, y = e^s$，即 $t = \ln x, s = \ln y$，则 $x\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial t}$，$x^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial t}$，

$y\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial s}$ ， $y^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}-\dfrac{\partial}{\partial s}$ ， $xy\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial s}$ ，原方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$ ，

取试探解为 $u=f(\alpha t+s)$ ，可得附加方程 $(\alpha-1)^2=0$ ，可得重根 $\alpha=1$ ，通解为

$u=f_1(t+s)+tf_2(t+s)=f_1(\ln xy)+\ln xf_2(\ln xy)$ 。

375. 证明方程 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\dfrac{x}{h}\right)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]-\dfrac{1}{a^2}\left(1-\dfrac{x}{h}\right)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ 的通解为 $u=\dfrac{f(x+at)+g(x-at)}{h-x}$ ，

由此写出此方程在初始条件 $u\big|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x)$ 下的解。

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{f(x+at)+g(x-at)}{(h-x)^2}+\dfrac{f'(x+at)+g'(x-at)}{h-x}$ ，

$(h-x)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(x+at)+g(x-at)+(h-x)\left[f'(x+at)+g'(x-at)\right]$ ，

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(h-x)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]=(h-x)\left[f''(x+at)+g''(x-at)\right]$ ，

$\dfrac{1}{a^2}(h-x)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(h-x)\left[f''(x+at)+g''(x-at)\right]$ ，所以 $u=\dfrac{f(x+at)+g(x-at)}{h-x}$ 是原

方程的解，它有两个任意函数，所以是原二阶方程的通解。

将通解代入初始条件得， $f(x)+g(x)=(h-x)\varphi(x)$ ， （a）

$f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{a}(h-x)\psi(x)$ 。 （b）

（b）式两边积分得 $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{a}\int_0^x(h-\xi)\psi(\xi)d\xi+C$ ， （c）

（a）+（c）得 $f(x)=\dfrac{1}{2}(h-x)\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\int_0^x(h-\xi)\psi(\xi)d\xi+\dfrac{C}{2}$ ，

所以 $f(x+at)=\dfrac{1}{2}(h-x-at)\varphi(x+at)+\dfrac{1}{2a}\int_0^{x+at}(h-\xi)\psi(\xi)d\xi+\dfrac{C}{2}$ 。

（a）−（c）得 $g(x)=\dfrac{1}{2}(h-x)\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\int_0^x(h-\xi)\psi(\xi)d\xi-\dfrac{C}{2}$ ，

所以 $g(x-at)=\dfrac{1}{2}(h-x+at)\varphi(x-at)-\dfrac{1}{2a}\int_0^{x-at}(h-\xi)\psi(\xi)d\xi-\dfrac{C}{2}$ ，

所以解为 $u=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\dfrac{1}{2}\dfrac{at}{h-x}\left[\varphi(x-at)-\varphi(x+at)\right]$

$$+\frac{1}{2a(h-x)}\int_{x-at}^{x+at}(h-\xi)\psi(\xi)d\xi。$$

376．求解弦振动方程的 Goursat 问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{x-at=0}=\varphi(x),u\big|_{x+at=0}=\psi(x)。\\ \varphi(0)=\psi(0)\end{cases}$

方程通解为 $u=f(x+at)+g(x-at)$，代入条件 $u\big|_{x-at=0}=\varphi(x),u\big|_{x+at=0}=\psi(x)$ 得

$$f(2x)+g(0)=\varphi(x)，\quad f(0)+g(2x)=\psi(x)，$$

所以 $f(x+at)=\varphi\left(\dfrac{x+at}{2}\right)-g(0)$，$g(x-at)=\psi\left(\dfrac{x-at}{2}\right)-f(0)$，

$u=\varphi\left(\dfrac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\dfrac{x-at}{2}\right)-f(0)-g(0)$，由于 $u(0,0)=f(0)+g(0)=\varphi(0)$，

所以 $u=\varphi\left(\dfrac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\dfrac{x-at}{2}\right)-\varphi(0)$。

377．在波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 中用 iy 代替 at 就能得到 Laplace 方程的"初值"问题

$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u\big|_{y=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\psi(x)\end{cases}$ 。其形式解为 $u=\dfrac{1}{2}\big[\varphi(x+iy)+\varphi(x-iy)\big]+\dfrac{1}{2i}\int_{x-iy}^{x+iy}\psi(\xi)d\xi$。

（1）令 $\varphi(x)=x,\psi(x)=e^{-x}$，可得 $u=x+e^{-x}\sin y$，验证这个表达式处处满足 Laplace

方程，也满足 $y=0$ 时的"初始"条件；

（2）如果 $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\psi(x)=0$，形式解为 $u=\dfrac{1+x^2-y^2}{\left(1+x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2}$，证明：这个函

数在点 $(0,\pm1)$ 不连续，因此，至少在这些点上不满足 Laplace 方程。这说明在一般情况下

Laplace 方程的"初值"问题无解。

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1-e^{-x}\sin y$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-x}\sin y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{-x}\cos y$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{-x}\sin y$，所以

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。$u\big|_{y=0}=u=x=\varphi(x)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}=e^{-x}\cos y\big|_{y=0}=e^{-x}=\psi(x)$。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}u=\dfrac{1}{1-y^2}$，$\lim\limits_{y\to\pm 1}\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{y\to\pm 1}\dfrac{1}{1-y^2}\to\infty$。

378．如果 $u(x,y,z)$ 满足 Laplace 方程，证明：$v=(ax+by+cz)u$ 满足 $\nabla^4 v=0$，其中 a,b,c 为任意常数。

记 $f=ax+by+cz$，$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 则 $\nabla f=\boldsymbol{a}$。

$\nabla v=\nabla(fu)=u\nabla f+f\nabla u=u\boldsymbol{a}+f\nabla u$，

$\nabla^2 v=\nabla\cdot(u\boldsymbol{a})+\nabla\cdot(f\nabla u)=\boldsymbol{a}\cdot\nabla u+u\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla u+f\nabla^2 u=2\boldsymbol{a}\cdot\nabla u$，

$\nabla\nabla^2 v=2\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla u)=2\big[\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\nabla u)+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\nabla u+\nabla u\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla u\cdot\nabla)\boldsymbol{a}\big]=2(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\nabla u$

$\qquad=2\left(a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\nabla u$，

$\nabla^4 v=2\nabla\cdot\left[\left(a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\nabla u\right]$，由于 a,b,c 为常数，可交换微分次序，因此

上式 $=2\left(a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\nabla^2 u=0$

379．如果 $u(x,y,z)$ 是直角坐标系下 Laplace 方程的解，证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 也是解。

显然可交换微分次序，$\nabla^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u=0$，同样的，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 也满足 Laplace 方程。

380．如果 $u(\rho,\varphi,z)$ 是柱坐标下 Laplace 方程的解，证明 $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 也是解，但 $\dfrac{\partial u}{\partial\rho}$ 一般不

是解。

$\nabla^2 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$，显然 $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 可与 ∇^2 交换次序，而 $\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ 不能与 ∇^2 交

换次序，同上题可知 $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 也是解，但 $\dfrac{\partial u}{\partial\rho}$ 一般不是解。

三维无界空间波动方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x,y,z) \end{cases}$ 的解（Poisson 公式）

为：$u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4\pi a} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} \oiint\limits_{S_{at}^M} \dfrac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{at} dS + \oiint\limits_{S_{at}^M} \dfrac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{at} dS \right]$，其中 S_{at}^M 是以点

$M(x,y,z)$ 为球心，at 为半径的球面。

381. 直接验证 $u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4\pi a} \oiint\limits_{S_{at}^M} \dfrac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{at} dS$ 是三维波动方程初值问题

$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x,y,z) \end{cases}$ 的解，其中 S_{at}^M 是以点 $M(x,y,z)$ 为球心，at 为半径的球面。

u 的表达式写成：

$u(x,y,z,t) = \dfrac{t}{4\pi} \iint \psi(x + at\sin\theta\cos\varphi, y + at\sin\theta\sin\varphi, z + at\cos\theta) d\Omega$

（$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$）。显然 $u(x,y,z,0) = 0$，

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{4\pi} \iint \psi(x + at\sin\theta\cos\varphi, y + at\sin\theta\sin\varphi, z + at\cos\theta) d\Omega$

$\qquad + \dfrac{at}{4\pi} \iint (\psi_\xi \sin\theta\cos\varphi + \psi_\eta \sin\theta\sin\varphi + \psi_\zeta \cos\theta) d\Omega$，

$\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \dfrac{1}{4\pi} \iint \psi(x,y,z) \sin\theta d\theta d\varphi = \dfrac{1}{4\pi} \psi(x,y,z) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \psi(x,y,z)$，

即 $u(x,y,z,t)$ 满足初始条件。

令 $v(x,y,z,r) = \dfrac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r^M} \psi(\xi,\eta,\zeta) dS$

$\qquad = \dfrac{1}{4\pi} \iint \psi(x + r\sin\theta\cos\varphi, y + r\sin\theta\sin\varphi, z + r\cos\theta) d\Omega$，

则 $\dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{1}{4\pi} \iint (\psi_\xi \sin\theta\cos\varphi + \psi_\eta \sin\theta\sin\varphi + \psi_\zeta \cos\theta) d\Omega$

$\qquad = \dfrac{1}{4\pi r^2} \iint (\psi_\xi \sin\theta\cos\varphi + \psi_\eta \sin\theta\sin\varphi + \psi_\zeta \cos\theta) r^2 d\Omega$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r^M} \left(\psi_\xi \sin\theta\cos\varphi + \psi_\eta \sin\theta\sin\varphi + \psi_\zeta \cos\theta \right) dS$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r^M} \left(\psi_\xi \boldsymbol{i} + \psi_\eta \boldsymbol{j} + \psi_\zeta \boldsymbol{k} \right) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint\limits_{B_r^M} \left(\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta} \right) dV$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r r_1^2 dr_1 \iint \left(\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta} \right) d\Omega \, ,$$

所以 $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial v}{\partial r} \right) = \dfrac{r^2}{4\pi} \iint \left(\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta} \right) d\Omega$ ，

而 $\nabla^2 v = \dfrac{1}{4\pi} \iint \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi\left(x + r\sin\theta\cos\varphi, y + r\sin\theta\sin\varphi, z + r\cos\theta \right) d\Omega$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint \left(\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta} \right) d\Omega \, ,$$

所以 $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial v}{\partial r} \right) = r^2 \nabla^2 v$ ，可写成 $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) = \nabla^2(rv)$ ，令 $r = at$ 即可得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u$ 。

382. 求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\[2mm] u|_{t=0} = \begin{cases} u_0, x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \\ 0, x^2 + y^2 + z^2 > R^2 \end{cases}, \left. \dfrac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 。
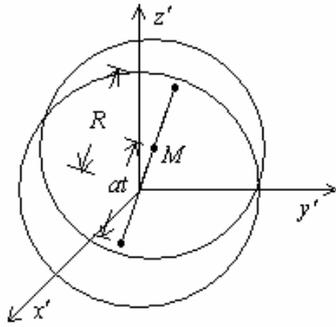
（1）先讨论 $M(x,y,z)$ 位于球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 内，即 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R$ 。

（i） $0 \le t < \dfrac{R - r}{a}$ ，即球面 S_{at}^M 完全位于球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 内，如下图：
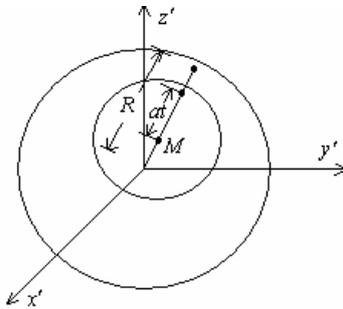
$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \oiint\limits_{S_{at}^M} \frac{u(x',y',z',0)}{at} dS' = \frac{u_0}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{at} 4\pi (at)^2 \right] = u_0 \, 。$$

（ii） $\dfrac{R - r}{a} < t < \dfrac{R + r}{a}$ ，即球面 S_{at}^M 与球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 有交集，如下图：
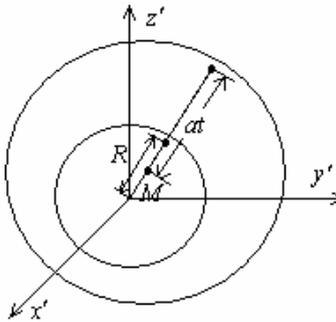
球面 S_{at}^{M} 在球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 内的部分是高为 $h = \dfrac{R^2 - (r - at)^2}{2r}$ 的球冠，面积为

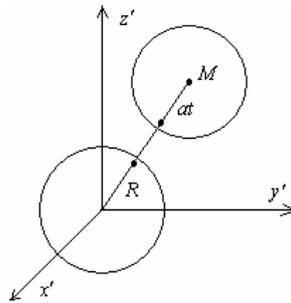$$S = 2\pi ath = \pi at\, \frac{R^2 - (r - at)^2}{r}\,,$$

$$u(M,t) = \frac{u_0}{4\pi a}\frac{d}{dt}\left[\pi\,\frac{R^2 - (r - at)^2}{r}\right] = \frac{u_0}{4\pi a}\frac{2\pi a(r - at)}{r} = u_0\,\frac{r - at}{2r}\,。$$

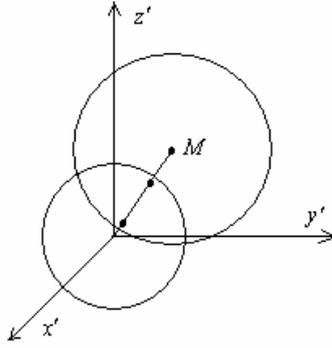（iii）$t > \dfrac{R + r}{a}$，即球面 S_{at}^{M} 完全位于球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 外，如下图，显然 $u(M,t) = 0$。

（2）$M(x, y, z)$ 位于球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 外，即 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R$。

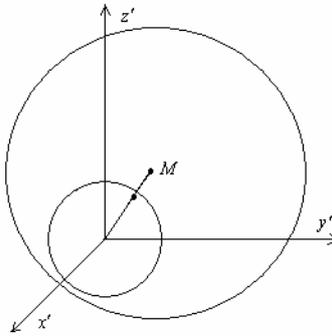（i）$0 \le t < \dfrac{r - R}{a}$，即球面 S_{at}^{M} 与球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 分离（如下图），显然 $u(M,t) = 0$。

（ii）$\dfrac{r - R}{a} < t < \dfrac{r + R}{a}$，即球面 S_{at}^{M} 与球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 有交集，如下图：

同第一种情况，有 $u(M,t) = u_0 \dfrac{r - at}{2r}$。

（iii）$t > \dfrac{r+R}{a}$，即球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ 在球面 S_{at}^M 内，如下图，显然 $u(M,t) = 0$。

383.（1）$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \\[2mm] u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$；（2）$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \\[2mm] u\big|_{t=0} = \varphi(r), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(r) \end{cases}$，其中

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。

（1）将坐标架置换一下，初始条件变为 $u\big|_{t=0} = \varphi(z), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(z)$（这样使下面计算方便）。

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S_{at}^M} \frac{\varphi(\zeta)}{at} dS + \iint\limits_{S_{at}^M} \frac{\psi(\zeta)}{at} dS \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \varphi(z + at\cos\theta) at\sin\theta d\theta \right] + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \psi(z + at\cos\theta) at\sin\theta d\theta \right\}$$

$$\overset{z+at\cos\theta=\xi}{=}\frac{1}{2a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{z-at}^{z+at}\varphi(\xi)d\xi+\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi(z-at)+\varphi(z+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)d\xi。$$

（2）可看出，解在空间上只与 r 有关，所以方程可写成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$，

令 $v=ru$，由于 $u\big|_{r=0}$ 有界，所以

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2},r>0\\[2mm]v\big|_{r=0}=0,v\big|_{t=0}=r\varphi(r),\dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=r\psi(r)\end{cases}$$ 。通解为 $v=f(r+at)+g(r-at)$，可定出

$$f(r)=\frac{1}{2}r\varphi(r)+\frac{1}{2a}\int_0^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi+\frac{C}{2},\quad g(r)=\frac{1}{2}r\varphi(r)-\frac{1}{2a}\int_0^{r-at}\xi\psi(\xi)d\xi-\frac{C}{2}。$$

当 $r>at$ 时直接可得

$$v=\frac{1}{2}\left[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi，$$

$$u=\frac{1}{2r}\left[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)\right]+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi。$$

当 $r<at$ 时，由 $v\big|_{r=0}=0$ 可得 $f(at)+g(-at)=0$，所以

$$g(r-at)=-f(at-r)=-\frac{1}{2}(at-r)\varphi(at-r)-\frac{1}{2a}\int_0^{at-r}\xi\psi(\xi)d\xi-\frac{C}{2},$$

$$v=\frac{1}{2}\left[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)\right]+\frac{1}{2a}\int_{at-r}^{at+r}\xi\psi(\xi)d\xi。$$

$$v=\frac{1}{2r}\left[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)\right]+\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{at+r}\xi\psi(\xi)d\xi。$$
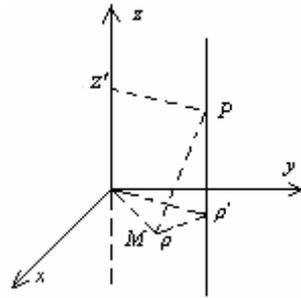
384．由三维无界空间波动方程初值问题的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\dfrac{1}{4\pi a^2}\dfrac{\delta\left(t-t'-\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$

（$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\\[2mm]G\big|_{t<t'}=0,\dfrac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t<t'}=0\end{cases}$）求出二维无界空间波动方

程初值问题的 Green 函数（$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')=\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\delta(t-t')\\[2mm]G\big|_{t<t'}=0,\dfrac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t<t'}=0\end{cases}$），

从而求出二维无界空间波动方程初值问题的 Poisson 公式。

$G\left(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t'\right)$ 就是三维空间中平行于 z 轴的线源产生的场，如下图，

线源上点 P 到 xy 面上的场点 M 的距离为 $\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|=\sqrt{z'^{2}+\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}$ ，

$$G\left(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t'\right)=\int_{-\infty}^{\infty}G\left(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'\right)dz'=\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta\left[\sqrt{z'^{2}+\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}-a\left(t-t'\right)\right]}{\sqrt{z'^{2}+\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}}dz' ,$$

当 $\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|<a\left(t-t'\right)$ 时，

$$\delta\left[\sqrt{z'^{2}+\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}-a\left(t-t'\right)\right]=\frac{a\left(t-t'\right)}{\sqrt{a^{2}\left(t-t'\right)^{2}-\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}}\left\{\delta\left[z'-\sqrt{a^{2}\left(t-t'\right)^{2}-\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta\left[z'+\sqrt{a^{2}\left(t-t'\right)^{2}-\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}\right]\right\} ，（见附录）$$

所以 $G\left(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t'\right)=\dfrac{1}{4\pi a\sqrt{a^{2}\left(t-t'\right)^{2}-\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\delta\left[z'-\sqrt{a^{2}\left(t-t'\right)^{2}-\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}\right]\right.$

$$\left.+\delta\left[z'+\sqrt{a^{2}\left(t-t'\right)^{2}-\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}\right]\right\}dz'$$

$$=\frac{1}{2\pi a^{2}\sqrt{\left(t-t'\right)^{2}-\dfrac{\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}{a^{2}}}} 。$$

当 $\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|>a\left(t-t'\right)$ 时，$\delta\left[\sqrt{z'^{2}+\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}-a\left(t-t'\right)\right]=0$ ，所以 $G\left(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t'\right)=0$ 。

综上，$G\left(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t'\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a^{2}\sqrt{\left(t-t'\right)^{2}-\dfrac{\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|^{2}}{a^{2}}}},\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|<a\left(t-t'\right)\\[4mm]0,\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|>a\left(t-t'\right)\end{cases} 。$

二维无界空间波动方程初值问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho},t)}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{\rho},t)=0\\[2mm]u\big|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{\rho}),\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{\rho})\end{cases}$。

将 u 和 G 方程写成 $\dfrac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'^2}-a^2\nabla'^2 u(\boldsymbol{\rho}',t')=0$，　　　　　　　　　　　（a）

由 Green 函数的互易性有 $\dfrac{\partial^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'^2}-a^2\nabla'^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')=\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\delta(t-t')$。（b）

（b）$\times\,u(\boldsymbol{\rho}',t')-$（a）$\times\,G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')$ ，对 $x'y'$ 全平面及 $t'\in[0,t+\varepsilon]$（$\varepsilon>0$）积分得

$$u(\boldsymbol{\rho},t)=\iint dx'dy'\int_0^{t+\varepsilon}\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'^2}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'^2}\right]dt'$$

$$+a^2\int_0^{t+\varepsilon}dt'\iint\left[G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\nabla'^2 u(\boldsymbol{\rho}',t')-u(\boldsymbol{\rho}',t')\nabla'^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\right]dx'dy'$$

$$=\iint dx'dy'\int_0^{t+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t'}\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}\right]dt'$$

$$+a^2\int_0^{t+\varepsilon}dt'\oint\left[G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial n'}-u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial n'}\right]dl'$$

由于 $G\sim\dfrac{1}{r'}$，$\dfrac{\partial G}{\partial n'}\sim\dfrac{1}{r'^2}$，$u\sim\dfrac{1}{r'}$，$\dfrac{\partial u}{\partial n'}\sim\dfrac{1}{r'^2}$，$dl'\sim r'$，所以后一项积分趋于 0，所以

$$u(\boldsymbol{\rho},t)=\iint\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0}^{t'=t+\varepsilon}dx'dy'，$$

由于 $G\big|_{t<t'}=0,\dfrac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t<t'}=0$，所以 $\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\dfrac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\dfrac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}\right]_{t'=t+\varepsilon}=0$，

$$u(\boldsymbol{\rho},t)=-\iint\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0}dx'dy'$$

$$=\frac{1}{2\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<a(t-t')}\frac{\varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\sqrt{t^2-\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}}dx'dy'+\iint_{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<a(t-t')}\frac{\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\sqrt{t^2-\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}}dx'dy'\right]。$$

385. 稳定问题的平均值定理。设在空间区域 V 内部有 $\nabla^2 u=0$，证明：任意一点 $M(x,y,z)$

处的 u 值等于以该点为球心的任意球面上 u 的平均值。

记 $\overline{u}(M,r) = \dfrac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r^M} u(\xi,\eta,\zeta)\, dS$ ，同 381 题可得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \right) = \frac{r^2}{4\pi} \iint \left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} \right) d\Omega = 0 ，\text{所以}\ \overline{u}(M,r) = \frac{A(M)}{r} + B(M)，$$

由 $\lim\limits_{r\to 0} \overline{u}(M,r) = u(M)$ 可定出 $A(M) = 0, B(M) = u(M)$ ，即 $\overline{u}(M,r) = u(M)$ 。

386．用 Riemann 方法求解：
$$\begin{cases} x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\[2mm] u\big|_{y=1} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \psi(x) \end{cases}$$ 。

关于 Riemann 方法见郭敦仁《数学物理方法》22.3 节，或 H.M.Lieberstein《Theory of Partial Differential Equation》Chapter 7。

设 $x > 0$ ， $y > 1$ 。特征线方程： $\dfrac{dy}{dx} = \pm \dfrac{y}{x}$ ，特征线 $xy = C_1$ ， $\dfrac{y}{x} = C_2$ ，令 $\xi = xy, \eta = \dfrac{y}{x}$

（ $\xi > 0, \eta > 0$ ），即 $x = \sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}}, y = \sqrt{\xi\eta}$ ，则方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \dfrac{1}{2\xi} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ ， $y=1$ 变换为

$\xi\eta = 1$ ，即 $u\big|_{y=1} = u\big|_{\xi\eta=1} = \varphi\left(\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}} \right)_{\eta=\frac{1}{\xi}} = \varphi(\xi)$ ，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_{\xi=\frac{1}{\eta}} = \dfrac{\partial u\big|_{\xi=\frac{1}{\eta}}}{\partial \eta} = \dfrac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \eta} = 0$ ，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \left(x \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{1}{x} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\xi\eta=1} = \sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}} \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\bigg|_{\xi\eta=1} = \xi \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\bigg|_{\xi\eta=1} = \psi\left(\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}} \right)_{\eta=\frac{1}{\xi}} = \psi(\xi)$ ，

该问题写成 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \dfrac{1}{2\xi} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \\[2mm] u\big|_{\xi\eta=1} = \varphi(\xi),\ \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\bigg|_{\xi\eta=1} = \dfrac{\psi(\xi)}{\xi} \end{cases}$ 。

Riemann 函数 $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ 满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{1}{2\xi} \dfrac{\partial R}{\partial \eta} = 0 \\[2mm] R(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = \exp\left(-\displaystyle\int_{\xi_0}^{\xi} \dfrac{1}{2\lambda} d\lambda \right) = \sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}} ，\\[4mm] R(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0) = 1 \end{cases}$

R 的方程写成 $\dfrac{\partial R_\eta}{\partial \xi} + \dfrac{1}{2\xi} R_\eta = 0$，可得 $R_\eta = A(\eta)\exp\left(-\int \dfrac{1}{2\xi} d\xi\right) = \dfrac{A(\eta)}{\sqrt{\xi}}$，

积分得 $R = \dfrac{B(\eta)}{\sqrt{\xi}} + C$，由于 $R(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0) = \dfrac{B(\eta)}{\sqrt{\xi_0}} + C = 1$，所以 $B(\eta) = (1-C)\sqrt{\xi_0}$，

代入 $R(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = \dfrac{B(\eta_0)}{\sqrt{\xi}} + C = \sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}}$ 得 $C=0$，所以 $B(\eta) = \sqrt{\xi_0}$，$R = \sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}}$。

$$u(\xi_0,\eta_0) = u(A)R(A;\xi_0,\eta_0) + \int_{\widehat{AB}} \left[R(u_\xi + bu)d\xi + u(R_\eta - aR)d\eta \right]$$

$$= \varphi\left(\dfrac{1}{\eta_0}\right)\sqrt{\xi_0\eta_0} + \int_{\frac{1}{\eta_0}}^{\xi_0} \sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}}\left[\dfrac{\psi(\xi)}{\xi} - \dfrac{1}{2\xi}\varphi(\xi) \right] d\xi$$

将 (ξ_0,η_0) 代换回 (x_0,y_0)，再换成 (x,y) 即可得

$$u(x,y) = y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right) + \sqrt{xy}\int_{\frac{x}{y}}^{xy} \xi^{-3/2}\left[\psi(\xi) - \dfrac{1}{2}\varphi(\xi) \right] d\xi。$$

若用公式 $u(\xi_0,\eta_0) = \dfrac{1}{2}u(A)R(A) + \dfrac{1}{2}u(B)R(B) + \int_{\widehat{AB}}\left\{\left[\dfrac{1}{2}Ru_\xi + \left(bR - \dfrac{1}{2}R_\xi\right)u\right]d\xi\right.$

$$\left. -\left[\dfrac{1}{2}Ru_\eta + \left(aR - \dfrac{1}{2}R_\eta\right)u\right]d\eta \right\}$$

则有 $u(x,y) = \dfrac{1}{2}y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{1}{2}\varphi(xy) + \dfrac{1}{2}\sqrt{xy}\int_{\frac{x}{y}}^{xy} \xi^{-3/2}\left[\psi(\xi) - \dfrac{1}{2}\varphi(\xi) \right]d\xi。$

387~390 略。

附录：

$\delta\left[f(x)\right] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\left|f'(x_k)\right|}\delta(x - x_k)$，其中 x_k（$k = 1, 2, \cdots, n$）是 $f(x)$ 的全部零点。

391．试根据变分原理导出完全柔软的均匀弦的横振动方程。

取弦上足够短的一段 dx，该段弦的动能为 $\dfrac{1}{2}\rho dx\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2$，势能为 $\dfrac{1}{2}Tdx\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$，弦的

Hamilton 作用量 $S=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}F\left(u_t,u_x\right)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\dfrac{1}{2}\left[\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2+Tdx\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dxdt$。

该泛函的 Euler-Lagrange 方程为 $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial u_t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial u_x}=\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$。

392．设 $y=y(x)$，$F\left(y,y'\right)$ 不显含 x，证明：$\begin{cases}J[y]=\displaystyle\int_a^b F\left(y,y'\right)dx\\y(a)=A,y(b)=B\end{cases}$ 取极值的必要条件

是 $y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}-F=C$ （常数）。

$$\delta J[y]=\int_a^b\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx=\dfrac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\delta y-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta ydx=0,$$

所以 $\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$。

由于 $\dfrac{d}{dx}\left(y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}-F\right)=y''\dfrac{\partial F}{\partial y'}+y'\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}-y'\dfrac{\partial F}{\partial y}-y''\dfrac{\partial F}{\partial y'}=y'\left(\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}-\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)=0$，
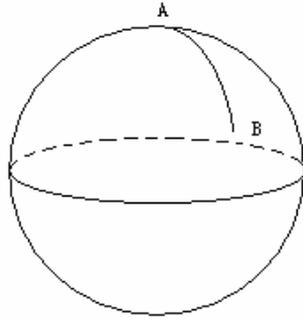
所以 $y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}-F=C$。

393．求泛函 $\begin{cases}J[y]=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx\\y(0)=0,y(1)=1\end{cases}$ 的极值曲线。

Euler-Lagrange 方程为 $\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$，所以 $\sqrt{1+y'^2}=Cy'$，可得 $y'=C_1$，积分得

$y(x)=C_1x+C_2$，由边界条件得 $y=x$。

394. 如下图所示，写出单位球面上从 A 点到 B 点的"短程线"所满足的微分方程，并求出短程线。证明此短程线在过 A，B 两点的大圆上。基于对称性的考虑，不妨取 A 点坐标为 $(\theta_0, \varphi_0) = (0, 0)$，B 点坐标为 (θ_1, φ_1)。（单位球面上弧元为 $ds = \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2}$）
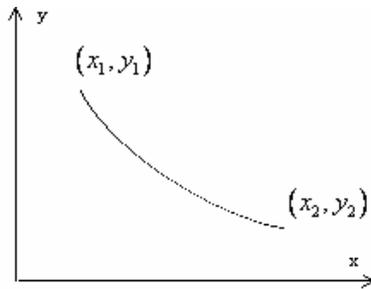

A，B 间弧长为 $s = \int_0^{\theta_1} \sqrt{1 + \sin^2\theta \varphi'^2} \, d\theta$（$\varphi' = d\varphi/d\theta$），

Euler-Lagrange 方程为 $\dfrac{d}{d\theta} \dfrac{\sin^2\theta \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2\theta \varphi'^2}} = 0$，即 $\dfrac{\sin^2\theta \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2\theta \varphi'^2}} = C$，代入 A 点坐标可得

$C = 0$，所以 $\dfrac{d\varphi}{d\theta} = 0$，即 $\varphi = C_1$，代入 B 点坐标得 $\varphi = \varphi_1$，这正是在大圆上。

395. 一质点在重力作用下沿光滑曲线由点 (x_1, y_1) 运动至点 (x_2, y_2)（见下图）。试求"捷线"（即质点沿此曲线运动费时最少）所满足的微分方程。

$v = \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2g(y_1 - y)}$，所以 $t = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \dfrac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2g(y_1 - y)}} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{v_0^2 + 2g(y_1 - y)}} \, dx$。

记 $F(y, y') = \sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{v_0^2 + 2g(y_1 - y)}}$，由 392 题结论，$y' \dfrac{\partial F}{\partial y'} - F = C$，即

$\dfrac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \dfrac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2g(y_1 - y)}} - \sqrt{1 + y'^2} \dfrac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2g(y_1 - y)}} = C$，还可写成

$\dfrac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = -C\sqrt{v_0^2 + 2g(y_1 - y)}$。

396. 若 $\overline{y}(x)$ 使泛函 $\begin{cases} J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx \\ y(a) = A, y(b) = B \end{cases}$ 在限制条件 $J_1[y] = \int_a^b G(x,y,y')dx = C$ 下

取极值，且相应的 Lagrange 乘子 $\lambda \neq 0$，试证明 $\overline{y}(x)$ 也使泛函 $\begin{cases} J_1[y] = \int_a^b G(x,y,y')dx \\ y(a) = A, y(b) = B \end{cases}$ 在

限制条件 $J[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx = D$ 下取极值。

第一个泛函极值问题引入 Lagrange 乘子 λ，则 $\overline{y}(x)$ 满足 $\int_a^b (F - \lambda G)dx$ 的 Euler-Lagrange

方程：$\dfrac{\partial F}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial G}{\partial y} - \overline{y}' \dfrac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \overline{y}' \dfrac{\partial G}{\partial y'} = 0$，由于 $\lambda \neq 0$，方程两边乘 $\dfrac{1}{\lambda}$ 得

$\dfrac{\partial G}{\partial y} - \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \overline{y}' \dfrac{\partial G}{\partial y'} + \dfrac{1}{\lambda} \overline{y}' \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$，这正是 $\int_a^b \left(G - \dfrac{1}{\lambda} F \right)dx$ 的 Euler-Lagrange 方程，即

$\overline{y}(x)$ 是第二个泛函极值问题的解。

397. 过二已知点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 作一曲线，使此曲线绕 x 轴旋转所得曲面面积最小，求曲线作满足的微分方程。

旋转面面积为 $S = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} 2\pi y ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$，由 392 题结论，Euler-Lagrange 方程

为 $y\sqrt{1 + y'^2} - \dfrac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$，即 $\dfrac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$。

398. 试写出本征值问题 $\begin{cases} \nabla^2 u + \lambda u = 0 \\ \left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} \right)_\Sigma = 0 \end{cases}$ 所对应的泛函极值问题。设 $\beta \neq 0$。

由于 $\nabla \cdot (\delta u \nabla u) = \nabla \delta u \cdot \nabla u + \delta u \nabla^2 u$，所以 $\delta u \nabla^2 u = \nabla \cdot (\delta u \nabla u) - \nabla \delta u \cdot \nabla u$，

$\iiint_V (\nabla^2 u + \lambda u) \delta u dV = \iiint_V \left[\nabla \cdot (\delta u \nabla u) - \nabla \delta u \cdot \nabla u + \lambda u \delta u \right] dV$

$= \oiint_\Sigma \delta u \dfrac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_V (\delta \nabla u \cdot \nabla u - \lambda u \delta u) dV = -\oiint_\Sigma \dfrac{\alpha}{\beta} u \delta u dS - \dfrac{1}{2} \delta \iiint_V (\nabla u \cdot \nabla u - \lambda u^2) dV$

$$= -\frac{1}{2}\delta\left[\oiint_{\Sigma}\frac{\alpha}{\beta}u^2 dS + \iiint_V \left(\nabla u\cdot\nabla u - \lambda u^2\right)dV\right] = 0$$

即对应泛函 $\begin{cases} \oiint_{\Sigma}\dfrac{\alpha}{\beta}u^2 dS + \iiint_V \nabla u\cdot\nabla u\, dV \\ \left(\alpha u + \beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_{\Sigma} = 0 \end{cases}$ 在条件 $\iiint_V u^2 dV = C$ 下的极值。

399．设有一长为 1 的弦，由同种质料组成，线密度 $\rho(x) = 1 + x$（$0 \le x \le 1$），则振动方程

为 $(1+x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，试用 Ritz 方法求出两端固定时的最低固有频率。

令 $u(x,t) = y(x)e^{i\omega t}$，代入方程得 $y'' + \dfrac{\omega^2}{T}(1+x)y = 0$。

对应泛函 $\int_0^1\left[y'^2 - \dfrac{\omega^2}{T}(1+x)y^2\right]dx$ 的极值。取一组基函数展开 $y(x)$：$y = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)$，

泛函化为 $\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n c_k c_l\int_0^1\left[\varphi_k'(x)\varphi_l'(x) - \dfrac{\omega^2}{T}(1+x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\right]dx = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n c_k c_l f_{kl}$。

要使它取极值，只需使它对 c_k（$k = 1, 2, \cdots n$）的偏导数为 0，即

$$\sum_{l=1,l\neq k}^n c_l f_{kl} + 2c_k f_{kk} = 0,\quad k = 1, 2, \cdots n,\quad \text{写成矩阵式} \begin{pmatrix} 2f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & 2f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & 2f_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0,$$

解之即可。

400．用 Ritz 方法求出 $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-1) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$ 的最低两个本征值的近似值，取试探函数为：

（1）$y = c_1(1 - x^2) + c_2 x(1 - x^2)^2$；（2）$y = c_1(1 - x^2) + c_2 x^2(1 - x^2)^2$。

该边值问题对应泛函 $\int_{-1}^1 y'^2 dx$ 在约束条件 $\int_{-1}^1 y^2 dx = C$ 下的极值问题。后面步骤略。